



Titre: Adaptation anisotrope sur des structures lagrangiennes cohérentes
Title: en mécanique des fluides

Auteur: Philippe Miron
Author:

Date: 2012

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Miron, P. (2012). Adaptation anisotrope sur des structures lagrangiennes
Citation: cohérentes en mécanique des fluides [Master's thesis, École Polytechnique de
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/830/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/830/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** André Garon, & Michel Delfour
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ADAPTATION ANISOTROPE SUR DES STRUCTURES LAGRANGIENNES
COHÉRENTES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

PHILIPPE MIRON
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AVRIL 2012

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ADAPTATION ANISOTROPE SUR DES STRUCTURES LAGRANGIENNES
COHÉRENTES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

présenté par: MIRON Philippe

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès Sciences Appliquées
a été dûment accepté par le jury constitué de:

M. DUFOUR Steven, Ph.D., président

M. GARON André, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. DELFOUR Michel, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. FORTIN André, Ph.D., membre

À ma famille,

Remerciements

Tout d’abord, j’aimerais remercier mes deux directeurs de recherche, André Garon et Michel Delfour. Merci André de m’avoir initialement donné l’opportunité de faire un stage au laboratoire, il y a maintenant 3 ans, et m’avoir ainsi permis de découvrir le monde de la recherche et m’empêcher de basculer du côté obscur (l’industrie).

J’aimerais aussi remercier Jérôme Vétel, pour m’avoir donné un sérieux coup de main autant lors des essais numériques que durant la correction du mémoire. Une mention spéciale aux soirées où tes conseils et tes “cours” privés m’ont encouragé à poursuivre au Doctorat et à m’intéresser plus sérieusement aux phénomènes reliés à la turbulence.

Je tiens à remercier mes collègues sans qui les journées passées au laboratoire seraient beaucoup plus longues. En ordre alphabétique pour éviter les disputes : Simon Bélanger, Lise Charlot, Mouhammad El Hassan, Ian Nandlall et Félix Salazar.

Remerciements aux technicien(ne)s, employé(e)s de Polytechnique et d’Aramark.

Je tiens aussi à remercier ma famille pour tous leurs encouragements au fil des dernières années. Un remerciement spécial à ma copine, Manuréva. Merci de m’encourager, de croire en moi et de me supporter dans les moments plus difficiles.

Finalement, un dernier remerciement à Cosette, qui est toujours près de moi et me surveille lorsque je travaille à la maison.

Résumé

Plusieurs méthodes permettent aujourd’hui d’analyser le comportement des écoulements qui régissent le fonctionnement de systèmes rencontrés dans l’industrie (véhicules aériens, marins et terrestres, génération d’énergie, etc.). Pour les écoulements transitoires ou turbulents, les méthodes expérimentales sont utilisées conjointement avec les simulations numériques (simulation directe ou faisant appel à des modèles) afin d’extraire le plus d’information possible. Dans les deux cas, les méthodes génèrent des quantités de données importantes qui doivent ensuite être traitées et analysées. Ce projet de recherche vise à améliorer notre capacité d’analyse pour l’étude des écoulements simulés numériquement et les écoulements obtenus à l’aide de méthodes de mesure (par exemple la vélocimétrie par image de particules *PIV*).

L’absence, jusqu’à aujourd’hui, d’une définition objective d’une structure tourbillonnaire a conduit à l’utilisation de plusieurs méthodes eulériennes (vorticité, critère Q , Λ_2 , etc.), souvent inadaptées, pour extraire les structures cohérentes des écoulements. L’exposant de Lyapunov, calculé sur un temps fini (appelé le *FTLE*), s’est révélé comme une alternative lagrangienne efficace à ces méthodes classiques. Cependant, la méthodologie de calcul actuelle du *FTLE* exige l’évaluation numérique d’un grand nombre de trajectoires sur une grille cartésienne qui est superposée aux champs de vitesse simulés ou mesurés. Le nombre de nœuds nécessaire pour représenter un champ *FTLE* d’un écoulement 3D instationnaire atteint facilement plusieurs millions, ce qui nécessite des ressources informatiques importantes pour une analyse adéquate.

Dans ce projet, nous visons à améliorer l’efficacité du calcul du champ *FTLE* en proposant une méthode alternative au calcul classique des composantes du tenseur de déformation de Cauchy-Green. Un ensemble d’équations différentielles ordinaires (EDOs) est utilisé pour calculer simultanément les trajectoires des particules et les dérivées premières et secondes du champ de déplacement, ce qui se traduit par une amélioration de la précision nodale des composantes du tenseur. Les dérivées premières sont utilisées pour le calcul de l’exposant de Lyapunov et les dérivées secondes pour l’estimation de l’erreur d’interpolation. Les matrices hessiennes du champ de déplacement (deux matrices en 2D et trois matrices en 3D) nous permettent de construire une métrique optimale multi-échelle et de générer un maillage anisotrope non structuré de façon à distribuer efficacement les nœuds et à minimiser l’erreur d’interpolation. La flexibilité des maillages

anisotropes permet d'ajouter et d'aligner les nœuds près des structures de l'écoulement et d'en enlever dans les régions qui soulèvent moins d'intérêt. L'adaptation de maillage est basée sur l'intersection des matrices hessiennes du champ de déplacement et non du champ *FTLE*. De manière empirique, nous montrons que cette méthode permet efficacement de révéler les crêtes du champ *FTLE* et d'éviter l'introduction de bruit engendré par la dérivation du champ final. La méthode est tout aussi efficace en utilisant des signaux de vitesse bruités, si bien qu'aucun pré-traitement des champs de vitesses n'est nécessaire, ce qui est particulièrement adapté aux écoulements mesurés.

Abstract

Several methods can help us to analyse the behavior of flows that govern the operation of fluid flow systems encountered in the industry (aerospace, marine and terrestrial transportation, power generation, etc.). For transient or turbulent flows, experimental methods are used in conjunction with numerical simulations (direct simulation or based on models) to extract as much information as possible. In both cases, these methods generate massive amounts of data which must then be processed and analyzed. This research project aims to improve the post-processing algorithms to facilitate the study of numerically simulated flows and those obtained using measurement techniques (*e.g.* particle image velocimetry *PIV*).

The absence, even until today, of an objective definition of a vortex has led to the use of several Eulerian methods (vorticity, the Q and the Λ -2 criteria, etc.), often unsuitable to extract the flow characteristics. The Lyapunov exponent, calculated on a finite time (the so-called *FTLE*), is an effective Lagrangian alternative to these standard methods. However, the computation methodology currently used to obtain the *FTLE* requires numerical evaluation of a large number of fluid particle trajectories on a Cartesian grid that is superimposed on the simulated or measured velocity fields. The number of nodes required to visualize a *FTLE* field of an unsteady 3D flow can easily reach several millions, which requires significant computing resources for an adequate analysis.

In this project, we aim to improve the computational efficiency of the *FTLE* field by providing an alternative to the conventional calculation of the components of the Cauchy-Green deformation tensor. A set of ordinary differential equations (ODEs) is used to calculate the particle trajectories and simultaneously the first and the second derivatives of the displacement field, resulting in a highly improved accuracy of nodal tensor components. The first derivatives are used to calculate the Lyapunov exponent and the second derivatives to estimate the interpolation error. Hessian matrices of the displacement field (two matrices in 2D and three matrices in 3D) allow us to build a multi-scale optimal metric and generate an unstructured anisotropic mesh to efficiently distribute nodes and to minimize the interpolation error. The flexibility of anisotropic meshes allows to add and align nodes near the structures of the flow and to remove those in areas of low interest. The mesh adaptation is based on the intersection of the Hessian matrices of the displacement field and not on the *FTLE* field. Empirically, we

show that this method can effectively reveal the ridges of the *FTLE* field and avoid the introduction of noise generated by the derivation of the resulting field. The method is also effective in presence of noise on velocity signals, so that no pre-processing of velocity fields is required, which is particularly adapted to measured flows.

Table des matières

Dédicace	iii
Remerciements	iv
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	ix
Liste des tableaux	xi
Table des figures	xii
Liste des annexes	xiv
Liste des sigles et abréviation	xv
Chapitre 1 Introduction	1
1.1 Problématique	1
1.2 Objectifs	3
Chapitre 2 Revue de littérature	5
2.1 Méthodes eulériennes d'identification des structures tourbillonnaires	5
2.2 Exposant de Lyapunov et structures lagrangiennes cohérentes	6
2.3 Calcul de l'exposant de Lyapunov sur une grille adaptée	7
2.4 Adaptation de maillage anisotrope	9
Chapitre 3 Développements mathématiques et mise en œuvre	12
3.1 Exposant de Lyapunov en temps fini (<i>FTLE</i>)	12
3.2 Calcul numérique du gradient spatial et de la matrice hessienne du champ de déplacement	16
3.3 Adaptation de maillage anisotrope	19
3.4 Estimation d'erreur	26

3.5	Parallélisation des algorithmes	29
Chapitre 4	Applications en dynamique des fluides	31
4.1	Vérification et validation	31
4.2	Exemples de fonctions analytiques	32
4.2.1	Champs bidimensionnels	33
4.2.2	Champs tridimensionnels	42
4.3	Champs de vitesses expérimentaux	44
4.3.1	Jet impactant (2D)	45
4.3.2	Transition vers la turbulence dans une restriction (2D)	47
4.3.3	Écoulement dans une valve cardiaque artificielle (3D)	53
Chapitre 5	Conclusion	57
5.1	Synthèse des travaux	57
5.2	Limitations de la solution proposée	58
5.3	Améliorations futures	60
Bibliographie	62
Annexes	68
Métrique optimale	68

Liste des tableaux

TABLEAU A.1	78
-----------------------	----

Table des figures

FIGURE 3.1	Exemple de trajectoires de particules au voisinage d'une <i>LCS</i> . . .	16
FIGURE 3.2	Subdivision d'un prisme en six tétraèdres	20
FIGURE 3.3	Représentation géométrique de l'intersection de deux métriques . .	23
FIGURE 3.4	Solutions de l'intersection de trois métriques	24
FIGURE 3.5	Intersection de métriques (Test #1)	25
FIGURE 3.6	Intersection de métriques (Test #2)	26
FIGURE 3.7	Intersection de métriques	27
FIGURE 3.8	Évolution du temps de calcul avec le nombre de fils d'exécution sur des machins parallèles	30
FIGURE 4.1	Convergence des fonctions tests lors de l'adaptation isotrope . . .	32
FIGURE 4.2	Affinement des structures	34
FIGURE 4.3	Représentation 3D du champ <i>FTLE</i>	35
FIGURE 4.4	Champ de vitesse analytique et discret	35
FIGURE 4.5	Démonstration de l'adaptation de maillage sur le gyre quasi-périodique par Lekien et Ross (2010)	36
FIGURE 4.6	Comparaison des méthodes d'adaptation pour le champ <i>FTLE</i> . .	39
FIGURE 4.7	Zoom du maillage adapté	40
FIGURE 4.8	Convergence du maillage	41
FIGURE 4.9	Comparaison des méthodes d'adaptation et des schémas de calculs du <i>FTLE</i>	43
FIGURE 4.10	Écoulement en <i>œil de chat</i>	44
FIGURE 4.11	Analyse de convergence de l'écoulement d'un jet impactant sans extrapolation	47
FIGURE 4.12	Écoulement d'un jet impactant	48
FIGURE 4.13	Analyse de convergence de l'écoulement d'un jet impactant avec extrapolation	49
FIGURE 4.14	Géométrie de la restriction	49
FIGURE 4.15	Première section de la restriction (2D)	52
FIGURE 4.16	Deuxième section de la restriction (2D)	53
FIGURE 4.17	Hypothèse de Taylor	55
FIGURE 4.18	Écoulement dans une valve cardiaque artificielle (3D)	56

FIGURE 5.1	Traitement des particules <i>perdues</i>	59
FIGURE 5.2	Calcul rapide de champs <i>FTLE</i>	61
FIGURE A.1	Exemple d'élément anisotrope	68

Liste des annexes

ANNEXE A	Métrieque optimale	68
----------	------------------------------	----

Liste des sigles et abréviation

Acronyme

CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct numerical Simulation
FTLE	Finite-Time Lyapunov Exponent
LCS	Lagrangian Coherent Structures
LES	Large Eddy Simulation
PIV	Particle Image Velocimetry
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes equation
Weno	Weighted Essentially Non-Oscillatory
TVD	Total Variation Diminishing

Caractères usuels

\mathbf{a}^j	Sommets de l'élément
c	Constante
C^n	Classe n d'une fonction
$d(x, y)$	Fonction de densité de maillage
D	Sous ensemble de U
	Dimension
$D^{(2)}$	Valeur maximale des termes de dérivées secondes
D_{L_p}	Terme entrant dans la construction de la métrique optimale
E	Erreur globale
\mathbf{f}	Fonction vectorielle
f_i	Composante d'une fonction vectorielle
G	Gain de vitesse dû à la parallélisation d'un algorithme
h	Longueur caractéristique d'un élément d'un maillage
	Taille d'un arête
h_{\min}	Taille minimale admise pour un arête
h_{\max}	Taille maximale admise pour un arête

h_t	Taille dans la direction \mathbf{t}
L_i	Interpolation linéaire de Lagrange
L_f	Longueur caractéristique utilisée dans le nombre de Reynolds
L_p	Norme p utilisée pour le calcul des métriques
n	Dimension de l'espace
N_v	Nombre de nœuds d'un maillage
p	Paramètre de la norme
P^k	Polynômes d'interpolation de Lagrange d'ordre k
r	Rapport d'anisotropie
Re	Nombre de Reynolds
\mathbb{R}^n	Ensemble des réels en dimension n
t	Temps
t_0	Temps initial
t_s	Temps pour un algorithme de code séquentiel
t_p	Temps pour un algorithme de code parallèle
\mathbf{u}	Champ de vitesse
U	Domaine fluide
\mathbf{v}	Vecteur unitaire
x	Coordonnée selon l'axe x
\mathbf{x}, x_i	Coordonnées spatiales
\mathbf{x}_0	Coordonnées initiales d'une particule
y	Coordonnée selon l'axe y
z	Coordonnée selon l'axe z

Lettres calligraphiques

\mathcal{H}	Matrice hessienne
\mathcal{K}	Élément d'un maillage
\mathcal{L}	Angle
\mathcal{M}	Métrique
\mathcal{M}^{opt}	Métrique optimale
\mathcal{N}	Complexité du maillage
\mathcal{O}	Ordre de l'erreur d'une approximation
\mathcal{R}	Matrice des vecteurs propres

\mathcal{S}	Tenseur de Cauchy-Green
\mathcal{T}	Temps d'intégration lors du calcul des trajectoires

Lettres grecques

α	Taux de convergence
$\delta(t)$	Vecteur de séparation
δ_i^j	Symbole de Kronecker
$\delta(t)$	Distance entre deux particules au temps t
Δt	Pas de temps pour l'intégration numérique
ϵ	Valeur seuil des valeurs propres
$\zeta(\mathbf{x})$	Fonction théorique variant sur un élément
λ	Valeur propre de la matrice hessienne
λ_{\min}	Plus petite valeur propre de la matrice hessienne
λ_{\max}	Plus grande valeur propre de la matrice hessienne
φ	Champs de déplacement
π_h	Opérateur de projection
$\sigma_{t_0}^T$	Exposant de Lyapunov
τ	Variable temporelle
ψ	Fonction de courant
Ω	Domaine de calcul

Symboles

\det	Déterminant d'une matrice
∇	Opérateur gradient
$\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot}$	Dérivée partielle
$\big _{x_0}$	Évalué en x_0
$ \cdot $	Valeur absolue
	Semi-norme
$\ \cdot\ $	Norme
\cap	Intersection de métrique
\otimes	Produit tensoriel
\cdot	Produit scalaire de deux vecteurs

Chapitre 1

Introduction

La mécanique des fluides est considérée comme une branche privilégiée de la physique car les fluides les plus répandus dans la nature, l'air et l'eau, étant transparents, il est facile de rendre les phénomènes visibles en utilisant de la fumée ou encore de simples colorants. Ce n'est malheureusement le cas qu'en régime laminaire car en régime turbulent la diffusion et le mélange des traceurs utilisés par les techniques de visualisation sont trop rapides. L'accès aux champs des vecteurs vitesse, que ce soit par des méthodes expérimentales ou numériques, présente une alternative mais soulève de nouvelles difficultés. En effet, bien que la notion de tourbillon soit utilisée depuis les toutes premières observations des mouvements fluides, il est paradoxal de constater qu'il n'en existe aucune définition claire, complète et universelle. Par exemple, la vorticité, qui représente l'une des notions les plus utilisées en mécanique des fluides, ne permet pas de différencier la déformation de la rotation, et donc ne peut être considérée comme un critère suffisant pour détecter la présence d'une structure tourbillonnaire.

1.1 Problématique

Il y a encore peu de temps, la prise de données expérimentales était exclusivement ponctuelle (principalement avec l'anémomètre à fil chaud et la vélocimétrie laser Doppler). Une multitude de techniques et de traitements numériques des signaux (corrélations, moyennes conditionnelles, estimations stochastiques, *POD*, etc.), toutes aussi ingénieuses les unes que les autres, ont été développées pour extraire un maximum d'informations à partir de mesures limitées. Ces données étaient également utilisées pour déterminer les valeurs des constantes empiriques intervenant dans les modèles de turbulence de type *RANS* (*Reynolds-averaged Navier-Stokes equation*), initialement destinés à quantifier les effets moyens de la turbulence dans les simulations numériques des équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds. Les codes de calculs pouvaient alors être validés sur la base des quantités moyennes turbulentes (énergie cinétique de turbulence, composantes du tenseur de Reynolds, corrélations d'ordres élevés, etc.).

Avec la continuelle évolution de la puissance informatique, la moyenne temporelle initialement utilisée dans l'équation de Navier-Stokes moyennée et donc résolue sans

terme instationnaire, a été remplacée par une moyenne d'ensemble afin de conserver la dérivée temporelle pour fournir des représentations instantanées des écoulements. En parallèle, la simulation numérique directe (*DNS : Direct Numerical Simulation*) s'est imposée pour traiter la turbulence aux très bas nombres de Reynolds, et la simulation des grandes échelles (*LES : Large Eddy Simulation*) s'est développée pour les nombres de Reynolds modestes mais plus élevés.

Du côté des techniques de mesure, les méthodes expérimentales ont connu un essor tout aussi considérable. Les méthodes de mesure optiques non-intrusives comme la vélocimétrie par images de particules (*PIV : Particle Image Velocimetry*), permettant dans sa version initiale d'obtenir instantanément deux composantes des vecteurs vitesse dans un plan, a été étendue à la troisième composante grâce aux systèmes stéréoscopiques et connaît une extension toute récente sous le nom de *PIV* tomographique (*tomo-PIV*) qui donne accès à ces mêmes quantités dans un volume de mesure. Dans l'eau, l'utilisation de caméras rapides fournit finalement des données résolues en espace et en temps.

Les quantités massives de données provenant des outils expérimentaux et numériques accessibles aujourd'hui devraient donc considérablement augmenter notre capacité à sonder la physique des fluides, et en particulier de la turbulence, pour mieux la comprendre. Ce n'est cependant pas si simple. En effet, bien que les techniques donnant accès aux champs de vitesse en espace et en temps aient considérablement évolué, celles permettant leur post-traitement n'ont pas connu une aussi importante évolution. On pourra d'ailleurs constater que les méthodes de post-traitement les plus utilisées aujourd'hui sont en fait basées sur celles développées pour les techniques de mesures ponctuelles et n'utilisent que très peu la richesse des informations accessibles pour traiter la physique fine. L'avantage des techniques modernes donnant accès simultanément à des informations spatiales et temporelles n'est pas encore complètement exploité et pour l'instant ne fait que faciliter la prise de mesure en la rendant non-intrusive, plus simple à mettre en œuvre et plus rapide à obtenir. Pourtant, il existe de nouveaux outils de post-traitement capables de fournir des informations plus riches que les outils classiques et qui exploitent tout le potentiel des moyens de mesure et de simulation les plus sophistiqués accessibles aujourd'hui. Nous nous proposons, dans le cadre de ce mémoire, d'en approfondir une particulièrement prometteuse.

1.2 Objectifs

La plupart des critères d'identification des tourbillons et des structures cohérentes que nous utilisons aujourd'hui sont eulériens. Ils sont en général construits à partir des invariants du tenseur local du gradient de vitesse, qui est donc basé sur des informations obtenues à un instant donné. Plusieurs inconvénients sont reliés à ces critères :

- ils sont invariants par changement de référentiel Galiléen mais ne le sont pas dans d'autres référentiels comme ceux en rotation ;
- ils nécessitent de choisir une valeur seuil arbitraire pour extraire la frontière de la structure ;
- ils n'ont pas de définition physique précise ;
- ils ne prennent pas en compte l'historique de l'écoulement.

L'exposant de Lyapunov, « classiquement » utilisé dans la théorie des systèmes dynamiques, a été introduit récemment en dynamique des fluides et apparaît comme une alternative très prometteuse. Ce critère lagrangien ne souffre pas des inconvénients présentés par ses homologues eulériens et est basé sur une interprétation physique simple qui prend en compte l'histoire de l'écoulement. Son calcul nécessite cependant de connaître, en chacun des points du champ instantané traité, les trajectoires que suivront (ou qu'ont suivies) les particules de fluide. En pratique, il apparaît que pour les bases de données spatio-temporelles obtenues à partir des simulations *DNS*, *LES* et *RANS*, ou des mesures par tomo-*PIV*, qui atteignent aisément des gigaoctets d'espace mémoire pour quelques secondes d'écoulement, les calculs sont si lourds et les fichiers de résultats ont des tailles si importantes qu'il est nécessaire voire inévitable d'optimiser la méthode de calcul.

L'objectif de ce travail est de développer une méthode précise, robuste et rapide pour calculer les champs spatio-temporels de l'exposant de Lyapunov de n'importe quel écoulement à partir de bases de données expérimentales ou numériques pour en faciliter la visualisation et l'analyse. La méthode obtenue fait appel aux notions de calcul de trajectoires (incluant celle d'interpolation et de schéma d'intégration numérique temporel), de calcul de métrique, d'adaptation de maillage, d'isotropie et d'anisotropie, d'estimation d'erreur et de critère de convergence. Après avoir présenté les avancées les plus récentes sur le sujet au Chapitre 2, les développements mathématiques et les algorithmes informatiques utilisés sont décrits au Chapitre 3. La méthode est testée au Chapitre 4,

préalablement sur des solutions analytiques (section 4.2), et appliquée à des données expérimentales (section 4.3) issues de mesures dans un jet impactant et dans une conduite cylindrique comportant une restriction. Dans ce dernier chapitre, et bien qu’une base de donnée 3D complète ne soit pas encore disponible, un calcul a toutefois été effectué en utilisant l’hypothèse de Taylor pour reconstruire un champ de vitesse volumique à partir de données temporelles obtenues dans un plan de mesure en aval d’une valve cardiaque mécanique. Nous concluons au Chapitre 5 par le résumé des résultats qui comprend également des pistes pour améliorer la méthode de calcul.

Chapitre 2

Revue de littérature

2.1 Méthodes eulériennes d'identification des structures tourbillonnaires

L'identification d'une structure tourbillonnaire représente un problème récurrent en dynamique des fluides si bien que sa définition n'est pas unique. Les structures d'un écoulement peuvent être caractérisées par une région de haute vorticité qui perdure (Provenzale, 1999) ou par des zones de haute énergie se déplaçant selon une certaine trajectoire caractéristique (Holmes *et al.*, 1998). On peut aussi comparer les propriétés statistiques d'un groupe de particules et les regrouper selon certaines caractéristiques communes (Elhmaïdi *et al.*, 1993). La plupart des critères d'identification sont basés sur une analyse locale du tenseur du gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$, et donc sont des critères de type eulérien. Ces techniques sont couramment utilisées pour localiser les centres des tourbillons. On pourra citer les travaux désormais classiques de Hunt *et al.* (1988) sur le critère Q , le second invariant de $\nabla \mathbf{u}$, Chong *et al.* (1990) sur le critère Δ , le discriminant de l'équation caractéristique de $\nabla \mathbf{u}$, Jeong et Hussain (1995) sur le critère λ_2 , relié au hessien de la pression, et Zhou *et al.* (1996) sur le critère λ_{ci} , la partie imaginaire de la paire de valeurs propres conjuguées l'une de l'autre de $\nabla \mathbf{u}$, qui sont largement cités dans la littérature. Curieusement, alors que ces critères étaient connus pour identifier des structures similaires dans la plupart des écoulements, leurs équivalences mathématiques n'ont été clairement expliquées que récemment par les travaux de Chakraborty *et al.* (2005).

Cependant, bien que ces définitions fournissent des critères invariants par changement de référentiel galiléen (non accéléré), ils ne sont pas invariants quel que soit le référentiel (accéléré), et en particulier pour les systèmes en rotation. Cela amena George Haller à proposer une définition *objective* d'un tourbillon (Haller, 2005), à partir d'une analyse lagrangienne.

2.2 Exposant de Lyapunov et structures lagrangiennes cohérentes

L'exposant de Lyapunov est largement utilisé dans les théories des systèmes dynamiques où il est défini dans la limite asymptotique, cependant son usage pour un temps fini n'a été introduit que récemment par Haller (2001) en dynamique des fluides. L'approche consiste à suivre les trajectoires de deux particules de fluide initialement adjacentes et de baser l'exposant sur la distance qui les sépare après un temps donné. En effectuant cette opération pour plusieurs points d'un domaine, on obtient un champ d'exposant de Lyapunov en temps fini (*FTLE* : *Finite-Time Lyapunov Exponent*). Les structures lagrangiennes cohérentes (*LCS* : *Lagrangian Coherent Structure*) sont définies par les maximums locaux de ce champ *FTLE*. Elles sont un outil puissant pour décrire les écoulements stationnaires, et représentent une alternative aux critères eulériens. Shadden *et al.* (2005) a fourni une théorie qui explique les propriétés de mélange et de transport des *LCS*, agissant comme des lignes matérielles révélant ainsi la topologie des écoulements.

Le calcul du *FTLE* nécessite de déterminer les trajectoires des particules de fluide suivies pendant un temps \mathcal{T} qui peut être positif ou négatif. Le caractère tri-dimensionnel de ces trajectoires et les coûts de calcul importants qui en découlent restreignent considérablement l'utilisation de l'exposant de Lyapunov pour l'étude de phénomènes complexes. En conséquence, les applications aux écoulements turbulents concernent uniquement les simulations numériques, incluant la turbulence 2D (Lapeyre, 2002) et la turbulence de paroi (Green *et al.*, 2007), alors que celles en expérimental sont limitées aux écoulements 2D (voir Voth *et al.*, 2002) ou à la turbulence quasi-2D générée dans les écoulements en rotation (Mathur *et al.*, 2007; Koh et Legras, 2002, présentent des résultats sur le tourbillon polaire stratosphérique avec l'exposant de Lyapunov non pas en temps fini mais en *dimension finie*¹).

Les critères eulériens nécessitent l'estimation de nombreuses dérivées spatiales, et par conséquent les résultats sont très sensibles au niveau de bruit des méthodes de mesure, ce qui est particulièrement critique pour la résolution des plus petites structures turbulentes. Au contraire, puisque le calcul du *FTLE* se base sur l'estimation de trajectoires obtenues par intégration temporelle du champ de vitesse, la méthode est naturellement

¹Au lieu de calculer la trajectoire de particules pour un temps fini, les auteurs déterminent le temps requis pour que la distance séparant deux particules initialement adjacentes atteigne une valeur préétablie. On remplace donc, lors du calcul de l'exposant de Lyapunov (Eq. (3.10) à la page 15), le temps d'intégration par une distance d'intégration.

moins sensible au bruit. Ainsi, les résultats déjà obtenus ont montré que même en présence d'erreurs de mesure importantes, le calcul de l'exposant de Lyapunov menait à des résultats fiables (Haller, 2002).

Shadden *et al.* (2005) ont décrit une méthodologie (détaillée au Chapitre 3) pour le calcul de l'exposant de Lyapunov sur des maillages cartésiens réguliers. Les coordonnées initiales des particules transportées par l'écoulement à partir du temps initial t_0 jusqu'au temps $t_0 \pm \mathcal{T}$ sont positionnées aux nœuds de la grille et leurs coordonnées au temps $t_0 \pm \mathcal{T}$ détermine le champ de déplacement (champ de déformation). L'utilisation d'une grille cartésienne facilite le calcul des composantes du tenseur de Cauchy-Green, obtenues à partir du gradient spatial du champ de déplacement. Les dérivées spatiales sont estimées directement à l'aide d'approximations par différences finies de deuxième ordre. La plus grande valeur propre de ce tenseur est ensuite utilisée pour construire l'exposant de Lyapunov à chaque nœud de la grille et c'est ce champ scalaire que l'on nomme le champ *FTLE*. Cette procédure peut être répétée pour une série de temps initiaux (t_0) afin de suivre l'évolution temporelle du champ *FTLE*.

Cette approche est très simple du point de vue algorithmique, surtout si les vitesses sont connues aux nœuds de la grille cartésienne (grille d'acquisition ou de mesure) qui coïncide avec la grille de calcul, et l'interpolation des vitesses est peu coûteuse. Pour améliorer la qualité de l'interpolation de vitesse sur la grille de mesure, la méthode proposée par Lekien et Marsden (2005) peut être utilisée, où un champ de vitesse de classe C^2 est construit en interpolant à l'aide de polynômes d'ordre supérieur. Toutefois, pour obtenir des structures lagrangiennes cohérentes mieux définies, la grille de calcul doit être beaucoup plus dense que la grille de mesure. Sans un critère objectif de raffinement pour la détection des structures cohérentes, le nombre de nœuds dans toutes les directions de la grille de calcul est systématiquement doublé, jusqu'à l'obtention d'un champ *FTLE* qui est qualitativement acceptable. Cela n'améliore évidemment pas l'information aux petites échelles mais l'augmentation du nombre de trajectoires calculées affine les structures résolues par le maillage initial.

2.3 Calcul de l'exposant de Lyapunov sur une grille adaptée

Les arguments évoqués précédemment mènent directement aux méthodes d'adaptation de maillage qui sont de plus en plus utilisées dans les simulations numériques pour améliorer

à moindre coût la précision des calculs. Que le but ultime soit de minimiser l'erreur sous un certain seuil de tolérance ou de diminuer le temps de calcul, les techniques d'adaptation de maillage optimisent la grille de calcul à la solution. Le but de ce maillage optimal est de réduire l'erreur d'interpolation entre la solution numérique et la solution exacte. En pratique on substitue à l'erreur exacte, qui nous est inaccessible, une estimation d'erreur que l'on peut construire. Une fois l'estimation de l'erreur obtenue, la plupart des techniques d'adaptation de maillage consistent à définir la taille de tous les éléments du domaine, afin d'obtenir une équidistribution de l'erreur d'interpolation. Les méthodes d'adaptation peuvent se séparer en deux grandes catégories : les méthodes basées sur la taille des éléments (*h*-method) et les méthodes basées sur le degré d'interpolation des éléments (*p*-method).

Dans ce mémoire, nous nous limiterons à l'adaptation de la taille des éléments en conservant le même degré d'interpolation pour tous les éléments du domaine. Dans cette catégorie, deux méthodes coexistent : l'adaptation isotrope, basée sur l'erreur d'interpolation *a posteriori* qui ne modifie pas la forme des éléments, et l'adaptation anisotrope. La contrainte sur la forme des éléments avait initialement été imposée afin de gérer la dégénérescence des éléments et de fabriquer des éléments optimaux sur le plan théorique.

L'erreur d'interpolation linéaire classique (Johnson, 1992) d'une variable \mathbf{u} sur un élément \mathcal{K} est :

$$\|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(\mathcal{K})} \leq c h_{\mathcal{K}}^2 \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}} \|\mathcal{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\| \quad (2.1)$$

où c est une constante, $h_{\mathcal{K}}$ est la longueur caractéristique de l'élément et $\mathcal{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ est la matrice des dérivées secondes de la solution.

C'est avec cette technique que Garth *et al.* (2007) ont proposé une méthode de distribution des particules plus efficace au sein de la grille de calcul qui implique le calcul des exposants de Lyapunov sur des grilles hiérarchiques cartésiennes. Pour les maillages 2D, un *quadtree* est utilisé pour raffiner le maillage de la grille initiale régulière en une sous grille régulière qui est plus dense à proximité des structures caractéristiques de l'écoulement. Le raffinement est contrôlé à l'aide de l'erreur d'interpolation calculée sur l'exposant de Lyapunov, qui est évaluée au niveau des nœuds de la grille. Un élément est subdivisé en quatre sous-éléments lorsque l'erreur d'interpolation est supérieure à une valeur prédéterminée, mais reste inchangé si l'erreur est inférieure à cette valeur cible. Cette procédure est appliquée de manière récursive jusqu'à ce que le processus de subdivision soit complété. Elle est robuste, et l'interpolation des vitesses, lors du calcul des trajectoires des particules sur la grille de calcul, se fait rapidement en parcourant

la structure de données construite préalablement. Pour les maillages 3D, cette approche est basée sur la structure des données *octree*. Dans l’approche de Garth *et al.* (2007), contrairement à celle de Shadden *et al.* (2005), les particules ne sont plus uniformément réparties, mais sont concentrées dans les régions où les gradients de champ *FTLE* sont les plus grands. Avec le même nombre de nœuds, il est possible de capturer plus efficacement les *LCS* de l’écoulement, avec un faible coût de calcul généré par l’analyse des erreurs et la subdivision des éléments en sous-éléments. Toutefois, l’approche présentée ne permet pas de retirer des éléments de la grille initiale qui pourrait être trop dense dans certaines régions de l’écoulement. Ceci est une limitation qui peut entraver la généralisation de leur méthodologie pour les écoulements transitoires et turbulents.

Dans Lekien et Ross (2010), le calcul des exposants de Lyapunov est généralisé pour les variétés différentielles. Leur méthode est basée sur l’utilisation de grilles de calcul non structurées adaptées afin d’accroître la précision des *LCS*. À chaque nœud, les gradients du champ de déplacement sont déterminés à l’aide d’une méthode de reconstruction utilisée en éléments finis et en volumes finis (Zienkiewicz et Zhu, 1992a,b; Labbé et Garon, 1995; Akin, 2005). Les gradients sont obtenus à un nœud par une somme pondérée des gradients calculés sur les éléments adjacents partageant ce nœud. Aucune information n’est fournie sur la précision de la reconstruction, en particulier pour les nœuds sur les bords du domaine de calcul, où la précision de la reconstruction est connue pour être généralement plus faible. Dans leur procédure, un élément (triangle) est uniformément divisé en trois sous-éléments, si la valeur de l’erreur d’interpolation à un des nœuds est supérieure à une valeur déterminée d’une manière *ad hoc*. Cette étape est réalisée de façon récursive, un peu comme dans la méthode présentée par Garth *et al.* (2007), jusqu’à ce que le champ obtenu soit qualitativement satisfaisant. L’approche a comme avantage d’être extrêmement robuste. Les auteurs montrent à l’aide d’un exemple 2D inspiré par les cellules de convection de type Rayleigh-Bénard (voir section 4.2 pour la description de cet écoulement) l’avantage de combiner la méthode d’adaptation isotrope à la reconstruction du gradient. L’approche nécessite un nombre considérablement réduit de nœuds de calcul par rapport aux méthodes classiques.

2.4 Adaptation de maillage anisotrope

L’obtention d’une grille de calcul optimalement adaptée aux *LCS* exige que nous nous éloignons des grilles cartésiennes hiérarchiques et des maillages non-structurés isotropes.

Un maillage anisotrope offre une flexibilité maximale et le potentiel de réduire significativement le nombre de nœuds nécessaires à la capture des structures lagrangiennes cohérentes. En outre, les éléments construits de cette manière peuvent être déformés pour s'adapter plus efficacement aux gradients de la solution. Le contrôle de la distribution des nœuds de calcul combiné avec une méthode d'estimation d'erreur dans le cadre d'une métrique optimale continue (Alauzet *et al.*, 2006; Courty *et al.*, 2006; Chen *et al.*, 2007) permet l'étirement et l'alignement des éléments dans le domaine de calcul.

L'erreur d'interpolation pour des éléments anisotropes représentant une variable \mathbf{u} sur un élément \mathcal{K} est :

$$\|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(\mathcal{K})} \leq c \left(\mathbf{a}^j - \mathbf{x} \right)^t \mathcal{H}(\mathbf{u}) \left(\mathbf{a}^j - \mathbf{x} \right) \quad (2.2)$$

où c est une constante, le vecteur \mathbf{a}^j est formé des sommets de l'élément \mathcal{K} et $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ est la matrice hessienne de la solution. Contrairement aux éléments isotropes, l'évaluation de l'erreur varie en fonction de la direction des éléments. Ceci permet de les étirer et de les aligner dans la direction de l'erreur minimale afin de minimiser l'erreur globale d'interpolation tout en diminuant le nombre d'éléments nécessaires.

Ces dernières années, l'adaptation de maillages non-structurés anisotropes (Vallet, 1992; Buscaglia et Dari, 1997; Castro-Diaz *et al.*, 1997; Almeida *et al.*, 1998; Habashi *et al.*, 2000) s'est révélée être un moyen efficace d'améliorer la précision des simulations numériques, et de capter les comportements anisotropes de certains phénomènes physiques (ondes de choc, couches limites, etc.). À l'aide de cette technique, il est possible de réduire considérablement le nombre de nœuds du maillage, tout en minimisant l'erreur d'interpolation sur le domaine de calcul. Cela réduit l'espace mémoire et le temps de calcul nécessaire pour obtenir la solution et assure l'obtention d'un maillage optimal pour les ressources disponibles. La technique est basée sur l'utilisation d'éléments (triangles ou tétraèdres) qui sont étirées et alignées en conformité avec les gradients de la solution, afin de minimiser l'erreur d'interpolation (Babuska et Aziz, 1976; Rippa, 1992; Shewchuk, 2002).

Les avancées les plus récentes dans le domaine des maillages anisotropes proviennent des travaux de Loseille (2008) et Alauzet (2010). En particulier, Loseille (2008) a établi les bases d'une métrique originale construite en fonction du nombre de nœuds nécessaires pour approximer la solution par éléments finis. Même si la plupart des applications sont dans le domaine de la dynamique des fluides numérique (*CFD : Computational Fluid Dynamics*), l'approche s'applique généralement au contrôle de l'erreur d'une fonction

numérique ou vectorielle qui est suffisamment régulière de manière à ce que la matrice hessienne existe en chaque point de la grille de calcul.

Afin d'améliorer la définition des crêtes du champ $FTLE$ grâce à l'adaptation de maillage, le choix le plus naturel est de construire une métrique optimale à partir du champ $FTLE$ (ce qui a été étudié dans le cadre d'une maîtrise précédente, voir Bélanger, 2010). Cette métrique optimale permet alors la création d'un maillage anisotrope avec le côté le plus long tangent à la crête. Cependant, cette approche nécessite le calcul de la dérivée seconde du champ $FTLE$ (matrice hessienne) au niveau des nœuds d'un maillage non structuré. Les techniques de récupération bien connues, comme celles de Zienkiewicz et Zhu (1992a,b), peuvent être utilisées à cette fin, mais avec une augmentation du coût de calcul. Par ailleurs, cette méthode suppose également que le champ de vitesse soit au moins de classe C^3 , et que la valeur propre maximale du tenseur de Cauchy-Green soit au moins de classe C^2 .

Ce mémoire présente une méthode de calcul alternative basée sur le champ de déplacement. Ce choix a été déduit de l'observation empirique que les LCS sont localisées à proximité des maximums locaux de la norme du champ de déplacement. En 3D, cette approche se traduit par l'obtention de trois métriques indépendantes qui sont ensuite combinées afin d'obtenir une métrique globale incluant l'information nécessaire. La matrice hessienne du champ de déplacement est directement calculée à partir de l'équation (3.15) et n'utilise aucune technique de reconstruction sur les maillages non-structurés. Les vitesses sont connues aux nœuds d'un maillage cartésien structuré, ce qui simplifie la construction de leurs dérivées.

Ainsi, en utilisant le concept de métrique multi-échelles continues comme celles introduites par Alauzet *et al.* (2006), Chen *et al.* (2007) et Courty *et al.* (2006), et en suivant la méthodologie développée par Loseille (2008), nous définissons une métrique optimale continue qui minimise l'erreur d'interpolation dans la norme L^p . Nous passons par la suite cette métrique à MeshAdapt qui est un logiciel d'adaptation de maillage commercial (S.A.S., 2003). Cette métrique a été construite à partir de la matrice hessienne du champ des déplacements, et non pas de la matrice hessienne du champ $FTLE$ car cela exigerait plus d'étapes de reconstruction des dérivées. En utilisant des champs de vitesse analytiques et expérimentaux, nous montrons les capacités et les limites de cette approche pour détecter et capturer les LCS . Nos expériences numériques, à la fois analytiques et basées sur des mesures de champs d'écoulement, montrent que cette méthode, basée sur les dérivées secondes du champ de déplacement, peut efficacement détecter les LCS .

Chapitre 3

Développements mathématiques et mise en œuvre

3.1 Exposant de Lyapunov en temps fini (*FTLE*)

Afin de bien décrire la méthode de calcul développée, il est nécessaire de présenter la théorie du *FTLE* qui a été initialement introduite par Haller et Yuan (2000); Haller (2001, 2002) et Shadden *et al.* (2005). On détaille dans cette section les définitions de base et les résultats qui conduisent à la construction du champ *FTLE*.

Rappelons que le but initial du *FTLE* est d'analyser des écoulements dont le champ de vitesse est connu dans un domaine U de \mathbb{R}^n . Pour toutes les applications pratiques, nous considérons un sous-ensemble $D \subset U$. Ce sous-ensemble peut représenter soit le domaine de calcul, où l'équation de Navier-Stokes est résolue, soit le domaine où des mesures des champs de vitesse sont effectuées. Les hypothèses et les définitions suivantes sont supposées s'appliquer :

Hypothèse 1 *Le domaine du fluide D est ouvert, borné et simplement connexe.*

Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ un champ de vitesses qui est fonction de la variable d'espace $\mathbf{x} \in U$ et de la variable temporelle t . Supposons que \mathbf{u} vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2 *Le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est de classe $C^2 \forall \mathbf{x} \in U$.*

Hypothèse 3 *Il existe un instant t_0 et un intervalle de temps $|\tau| > 0$ tels que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est C^0 par rapport au temps t dans l'intervalle $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ et tels que toutes les trajectoires partant de \mathbf{x}_0 dans D au temps t_0 ne sortent pas de U pour tout temps t dans $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$.*

Cette hypothèse permet d'intégrer $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en temps de t_0 à $t_0 + \mathcal{T}$ pour des valeurs de \mathcal{T} positives ou négatives telles que $|\mathcal{T}| \leq \tau$.

Définition 1 Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ un champ de vitesse qui satisfait les Hypothèses (1-3) et soit $\varphi(t) = \varphi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ la solution au temps t de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt}(t) &= \mathbf{u}(\varphi(t), t) \text{ sur }]t_0 - \tau, t_0 + \tau[; \\ \varphi(t_0) &= \mathbf{x}_0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

pour toutes positions initiales $\mathbf{x}_0 \in D$ au temps t_0 .

L'équation différentielle ordinaire (3.1) est la construction lagrangienne classique du champ de déplacement. Un schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre élevé suffit pour calculer le champ de déplacement avec le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ connu. Toutefois, il est important de mentionner les travaux de Leung (2011) qui a utilisé un point de vue eulérien afin d'exprimer ces équations. Le champ de déplacement vérifie alors un ensemble d'équations d'advection temporelles et nécessite l'utilisation d'un algorithme sophistiqué de type WENO/TVD (*Weighted Essentially Non-Oscillatory / Total Variation Diminishing*) pour obtenir une précision d'ordre élevé. La formulation discontinue de Galerkin des éléments finis peut également être utilisée pour résoudre ce système d'équations aux dérivées partielles, avec le bénéfice d'intégrer l'estimation de l'erreur et l'adaptation de maillage (Lacasse *et al.*, 2007).

On calcule les trajectoires des particules et ainsi leurs positions finales en intégrant l'équation (3.1) du temps initial t_0 au temps final $t_0 + \mathcal{T}$:

$$\varphi_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}(t_0)) : \mathbf{x}(t_0) \rightarrow \mathbf{x}(t_0 + \mathcal{T}) = \int_{t_0}^{t_0 + \mathcal{T}} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}(t_0)), t) dt. \quad (3.2)$$

Ainsi $\varphi_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}(t_0))$ définit le champ des positions des particules qui sont dans U au temps $t_0 + \mathcal{T}$ et qui étaient initialement aux positions $\mathbf{x}(t_0)$ dans D (voir Hypothèse 3). Le champ de déplacement est de classe C^2 en espace et C^1 en temps.

Afin d'identifier les structures lagrangiennes cohérentes de l'écoulement, on introduit la distance $\delta(t_0 + \mathcal{T})$ qui sépare deux particules \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 au temps $t_0 + \mathcal{T}$ qui étaient initialement séparées d'une distance $\delta(t_0)$ au temps t_0 (voir Fig. 3.1).

$$\delta(t_0 + \mathcal{T}) = \varphi_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_2(t_0)) - \varphi_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_1(t_0)) \quad (3.3)$$

Pour des particules initialement adjacentes séparées d'une distance infinitésimale $\delta(t_0) = \mathbf{x}_2(t_0) - \mathbf{x}_1(t_0)$, il est possible d'exprimer le terme $\varphi_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_2(t_0))$ en fonction de \mathbf{x}_1 en utilisant le développement en série de Taylor :

$$\boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_2(t_0)) = \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_1(t_0)) + (\boldsymbol{\delta}(t_0) \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_1(t_0)) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\delta}(t_0)^2\|), \quad (3.4)$$

ce qui permet de réécrire l'équation (3.3) sous la forme suivante (en omettant les termes d'ordre deux et supérieurs en $\boldsymbol{\delta}(t_0)$) :

$$\boldsymbol{\delta}(t_0 + \mathcal{T}) \simeq (\boldsymbol{\delta}(t_0) \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_1(t_0)). \quad (3.5)$$

La norme de $\boldsymbol{\delta}(t_0 + \mathcal{T})$ s'exprime alors sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\delta}(t_0 + \mathcal{T})\| &\simeq \sqrt{\langle \boldsymbol{\delta}(t_0), \left((\nabla \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_1(t_0)))^t \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_1(t_0)) \right) \cdot \boldsymbol{\delta}(t_0) \rangle} \\ \|\boldsymbol{\delta}(t_0 + \mathcal{T})\| &\simeq \sqrt{\langle \boldsymbol{\delta}(t_0), \mathcal{S} \cdot \boldsymbol{\delta}(t_0) \rangle} \end{aligned} \quad (3.6)$$

où le tenseur de Cauchy-Green \mathcal{S} , utilisé en mécanique du solide afin de représenter une déformation, est utilisé ici pour un domaine fluide :

Définition 2 *Le tenseur de Cauchy-Green :*

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial x} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial z} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial x} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial z} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial x} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{t_0}^{\mathcal{T}}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

est un tenseur de déformation indépendant de la rotation. En coordonnées cartésiennes, il s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{x}_1(t_0)) &= \sum_{ij} \mathcal{S}_{ij}(\mathbf{x}_1(t_0)) e_i \otimes e_j \\ \mathcal{S}_{ij}(\mathbf{x}_1(t_0)) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

C'est un tenseur symétrique d'ordre 2 avec des valeurs propres réelles et positives. La plus grande et la plus petite valeur propre de \mathcal{S} sont respectivement $\lambda_{\max}(\mathbf{x}_0)$ et $\lambda_{\min}(\mathbf{x}_0)$. Notons que nous avons omis les indices t_0 et \mathcal{T} afin de simplifier la notation. Les composantes du tenseur de Cauchy-Green sont de classe $C^1(D)$.

La norme du tenseur de Cauchy-Green $\|\mathcal{S}\|$ consiste à déterminer les valeurs propres de la matrice \mathcal{S} . Comme on s'intéresse au déplacement maximal des particules, on peut

borner l'équation (3.6) en déterminant la valeur propre maximale :

$$\max_{\boldsymbol{\delta}(t_0)} \|\boldsymbol{\delta}(t_0 + \mathcal{T})\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{S})} \|\boldsymbol{\delta}(t_0)\| \quad (3.9)$$

où $\boldsymbol{\delta}(t_0)$ est aligné avec le vecteur propre correspondant à la valeur propre maximale du tenseur \mathcal{S} .

L'équation (3.9) peut être réécrite sous une forme exponentielle en définissant l'exposant de Lyapunov $\sigma_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x})$, obtenu à l'aide des équations (3.9) et (3.11) :

$$\sigma_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2|\mathcal{T}|} \ln(\lambda_{\max}(\mathcal{S})) ; \quad (3.10)$$

$$\max_{\boldsymbol{\delta}(t_0)} \|\boldsymbol{\delta}(t_0 + \mathcal{T})\| = e^{\sigma_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x})|\mathcal{T}|} \|\boldsymbol{\delta}(t_0)\|. \quad (3.11)$$

Cette forme exponentielle est empruntée à la théorie des systèmes dynamiques. Le champ scalaire qui en résulte représente une mesure normalisée du taux de croissance de la distance séparant des particules de fluide initialement adjacentes après un intervalle de temps fini \mathcal{T} . Il permet d'identifier les lignes matérielles répulsives lorsque le temps d'intégration est positif ($\mathcal{T} > 0$), et les lignes matérielles attractives lorsque le temps d'intégration est négatif ($\mathcal{T} < 0$). En pratique, le *FTLE* est un critère d'identification des lignes/surfaces de décollement et de recollement, et permet également de détecter les structures tourbillonnaires (*cf.* Chap. 4).

La figure 3.1 montre schématiquement un exemple d'une ligne attractive et d'une ligne répulsive. Ces lignes d'intérêt sont appelées des *LCS* et correspondent à des maxima locaux (ou simplement des crêtes) de $\sigma_{t_0}^{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_0)$. Les *LCS* sont alors localement caractérisées par les valeurs propres du hessien du champ *FTLE*, dont l'existence est soumise aux hypothèses subsidiaires suivantes :

Hypothèse 4 *Par observation, comme la matrice hessienne nécessite des dérivées de troisième ordre du champ de déplacement, la classe du champ de vitesse doit être d'au moins $C^3(D)$.*

Hypothèse 5 *Un champ de valeurs propres, comme celui défini par $\lambda_{\max}(\mathbf{x}_0)$, est différentiable s'il est simple. On suppose que $\lambda_{\max}(\mathbf{x}_0)$ est simple $\forall \mathbf{x}_0 \in D$, ou au minimum dans le voisinage des *LCS*. Dans Shadden et al. (2005), ceci est équivalent à sa troisième hypothèse ($\ln(\lambda_{\min}(\mathbf{x}_0)) < 0 < \ln(\lambda_{\max}(\mathbf{x}_0))$), si l'écoulement est 2D. Ceci est lié à la*

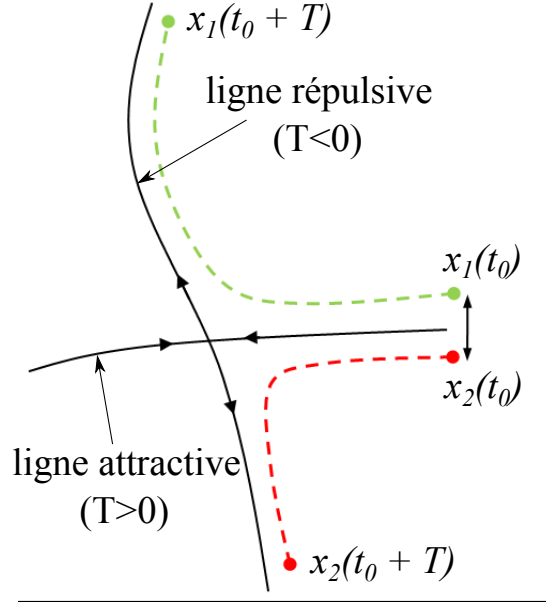


FIGURE 3.1 Exemple de trajectoires de particules au voisinage d'une *LCS* qui met également en évidence l'éloignement de deux particules initialement séparées d'une distance $\delta(t_0)$ (figure tirée de Shadden *et al.*, 2005).

notion de trajectoires hyperboliques en temps fini, mais pas à la différentiabilité de la valeur propre.

3.2 Calcul numérique du gradient spatial et de la matrice hessienne du champ de déplacement

On vise à améliorer l'analyse et l'extraction des *LCS* à partir de mesures du champ de vitesse qui proviennent généralement de bases de données de très grande dimension (de l'ordre du téraoctet). La vélocimétrie par images de particules est probablement la technique la plus largement utilisée (Raffel *et al.*, 2002) pour obtenir de telles données, cependant, pour calculer les champs *FTLE*, les mesures doivent être résolues en temps, c'est à dire que la fréquence d'acquisition doit être suffisamment élevée pour suivre adéquatement l'évolution dans le temps. Dans les gaz, seules les grandes structures, comme les structures cohérentes dans les écoulements turbulents, peuvent être résolues en temps, tandis que dans les liquides, toutes les échelles de vitesse peuvent parfois être résolues.

Les méthodes de mesure standards fournissent généralement deux composantes de

vitesse dans un plan et le domaine D est habituellement une région rectangulaire. Le champ de vitesse est donc discret et défini au niveau des nœuds d'un maillage uniforme cartésien qui couvre le domaine. Les dérivées de premier et deuxième ordre du champ de vitesse sont approximées aux nœuds du maillage par des différences finies d'ordre quadratique. Cela permet une interpolation bilinéaire efficace du champ de vitesse et de ses dérivées.

Dans Shadden *et al.* (2005), les nœuds du maillage sont les coordonnées initiales des particules dont on calcule les trajectoires. Ainsi, le champ de vitesse et le champ de déplacement sont toujours connus au niveau des mêmes nœuds. Encore une fois, des formules de différences finies de deuxième ordre sont appropriées pour estimer les dérivées premières du champ de déplacement afin de construire le tenseur de Cauchy-Green \mathcal{S} . Toutefois, pour extraire précisément les *LCS* du champ *FTLE*, un grand nombre de nœuds est nécessaire. Le maillage peut alors être uniformément raffiné pour capturer les structures de l'écoulement avec précision, car elles évoluent et se déplacent en permanence dans le domaine D . Par exemple, dans Vétel *et al.* (2010), plus de 200 000 nœuds (et parfois jusqu'à 300 000 nœuds) ont été nécessaires pour capturer un champ *FTLE* 2D avec précision. Le maillage a dû être raffiné 16 fois dans chacune des directions x et y , et comme le temps de calcul est proportionnel au nombre de points de la grille, cela engendre un temps de calcul 256 fois plus important.

En travaillant avec de grandes bases de données, il est certainement inefficace d'augmenter le nombre de nœuds dans un maillage cartésien en doublant simplement le nombre de lignes et de colonnes (et de plans en 3D). Le champ de vitesse doit être interpolé dans ce maillage dense sans en améliorer la précision, car nous travaillons sur des données mesurées. Il est donc beaucoup plus efficace de travailler avec deux maillages : un maillage cartésien structuré pour le champ de vitesse discret, et un maillage anisotrope non structuré de façon à optimiser la distribution des particules à proximité des structures lagrangiennes de l'écoulement (*LCS*). Toutefois, en adoptant cette stratégie, le calcul nodal du gradient et de la matrice hessienne s'appuient sur des techniques de reconstruction d'éléments finis (Akin, 2005; Lipnikov et Vassilevski, 2006; Vallet *et al.*, 2007) qui ne sont pas aussi efficaces et aussi précises que les formules de différences finies sur un maillage régulier.

Nous proposons donc une alternative qui permet de calculer le gradient et la matrice hessienne (si nécessaire) en même temps que l'équation (3.1) en prenant les dérivées partielles de premier et deuxième ordres de cet ensemble d'équations. Cela donne l'ensemble

d'équations différentielles ordinaires (Eqs. 3.13 et 3.15) avec leurs conditions initiales appropriées. Pour le développement de ces équations, notons que les dérivées d'espace et de temps sont commutatives.

Définition 3 *L'équation différentielle ordinaire de la dérivée directionnelle du champ de déplacement qui satisfait l'hypothèse de la Définition 2 est définie comme suit :*

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}, t) \quad (3.12)$$

où \mathbf{v} est un vecteur unitaire. Comme il est possible d'intervertir les dérivées d'espace et de temps, on peut récrire cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}, t). \quad (3.13)$$

On obtient l'écriture selon les coordonnées cartésiennes avec les conditions initiales de cette expression :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) &= \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \bigg|_{(\boldsymbol{\varphi}, t)} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \bigg|_t \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \bigg|_{t_0} &= \delta_j^i \quad \forall \mathbf{x}_0 \in D \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les conditions initiales de l'équation (3.14) reflètent le fait que la dérivée directionnelle selon l'axe x de la coordonnée x est égale à 1 mais quelle est nulle dans les directions des axes y et z (idem pour les autres composantes). Les éléments de $\nabla \boldsymbol{\varphi}$ sont $C^1(D)$.

Définition 4 *L'équation différentielle ordinaire pour la matrice hessienne du champ de déplacement qui satisfait l'hypothèse de la Définition 2 est définie comme étant :*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathcal{H}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}, t)). \quad (3.15)$$

L'écriture selon les coordonnées cartésiennes avec les conditions initiales est la sui-

vante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) &= \sum_r \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_r} \Big|_{(\boldsymbol{\varphi}, t)} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_t \right) + \sum_r \left(\sum_s \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_r \partial x_s} \Big|_{(\boldsymbol{\varphi}, t)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} \Big|_t \right) \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} \Big|_t \right); \\ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{t_0} &= 0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in D. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Notons que dans l'équation (3.16), les conditions initiales reflètent le fait que la dérivée directionnelle du deuxième ordre de toutes les coordonnées par rapport aux axes x , y , z est nulle. Les éléments de $\mathcal{H}(\boldsymbol{\varphi})$ sont $C^0(D)$.

L'utilisation simultanée des équations (3.1, 3.13 et 3.15) a des avantages et des inconvénients à l'égard de l'exactitude du calcul, du coût de calcul, et de la complexité des outils qui doivent être intégrés. Le bénéfice direct est que le champ de déplacement, son gradient et sa matrice hessienne peuvent ensuite être interpolés en permanence sur le maillage non structuré et approché par des polynômes de Lagrange P^k au niveau de l'élément (Reddy, 2006). Nous avons choisi les polynômes linéaires de Lagrange pour leur simplicité, et aussi parce que l'adaptation de maillage anisotrope sur ce type d'interpolation a atteint une certaine maturité.

Cependant, un inconvénient est l'augmentation de la complexité numérique et le coût de calcul, car nous devons résoudre un ensemble de 12 équations différentielles ordinaires en 2D, ou 30 équations différentielles ordinaires en 3D. Pour être efficace, ceci doit être utilisé à l'intérieur d'un outil fournissant des moyens de détecter les gradients importants au sein du champ de déplacement, d'évaluer l'erreur de discrétisation, et d'optimiser le maillage afin de minimiser cette erreur. C'est le thème des deux prochaines sections.

3.3 Adaptation de maillage anisotrope

Les méthodes de maillage adaptatif (Akin, 2005) permettent d'évaluer la qualité d'une solution initiale obtenue sur un maillage grossier en utilisant une certaine forme d'estimation d'erreur, et de modifier la structure de l'approximation numérique de façon systématique afin d'améliorer la qualité globale de la solution.

Remarque 1 Lorsque l'analyse se fait sur des données expérimentales, le maillage initial (grossier) est construit directement à partir de la grille de mesure, i.e. en 2D, toutes les

fenêtres de mesure sont subdivisées en 2 triangles égaux tandis qu'en 3D, les volumes de mesure sont subdivisés en 6 tétraèdres comme illustré sur la figure 3.2. Dans les deux cas, les vitesses mesurées sont connues aux nœuds du maillage initial.

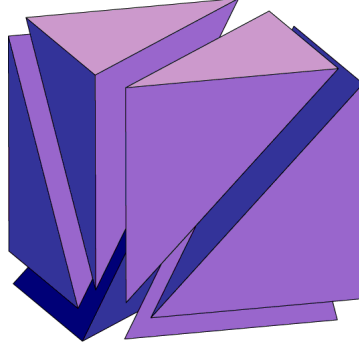


FIGURE 3.2 Subdivision d'un prisme en six tétraèdres

Une méthode de remaillage adaptatif a été choisie puisqu'elle offre le plus grand contrôle sur la taille des éléments (Alauzet, 2010) ce qui permet d'optimiser le calcul des écoulements cisailés comme les couches limites, les jets et les sillages (Palmerio et Dervieux, 1986; Peraire *et al.*, 1987; Sahni *et al.*, 2008; Bourgault *et al.*, 2009). Avec cette approche, le problème est d'abord résolu sur une grille grossière pour capter globalement la physique de l'écoulement. La solution obtenue est ensuite analysée afin de déterminer à quels endroits plus de points sont nécessaires, et un maillage optimisé est généré. Le problème est alors résolu à nouveau sur le nouveau maillage. Ce processus itératif est répété jusqu'à ce que le niveau de précision requis soit atteint.

Dans notre cas, la solution numérique est le champ de déplacement des particules calculé avec les équations (3.1, 3.13 et 3.15), et la précision de l'approximation numérique est liée au pas de temps utilisé, à la construction des dérivées premières et secondes du champ de vitesse de l'écoulement, à son interpolation et évidemment aux nombres et à la densité des particules lagrangiennes (ou nœuds). De toute évidence, là où le gradient du champ de déplacement sera élevé, la densité des particules doit être augmentée, et inversement, elle doit être réduite lorsque le gradient est faible, afin de diminuer le coût de calcul. Localement la dérivée directionnelle du champ de déplacement peut être maximale dans une direction préférentielle, ce qui implique une distribution hétérogène des particules. Le maillage qui relie ces particules est anisotrope, et peut être optimisé pour minimiser l'erreur d'interpolation.

La construction d'un maillage anisotrope est habituellement obtenue en modifiant la manière dont la distance entre deux points voisins est mesurée dans un logiciel de maillage traditionnel (George et Frey, 2008). Ceci est réalisé par la construction d'un champ de métrique, telle que la distance mesurée à l'aide de la métrique entre les sommets de tous les simplex (triangle, tétraèdre) du maillage adapté est unitaire. Cette technique appartient à la famille des métriques continues. La base théorique a été introduite par Borouchaki *et al.* (1997b,a); Frey et Borouchaki (1997) et ensuite appliquée par Alauzet *et al.* (2006), Loseille (2008). Plus précisément, la méthodologie élaborée par Alauzet *et al.* (2006) et Loseille (2008) définit une métrique optimale qui permet d'obtenir un maillage d'éléments finis, avec une complexité cible, minimisant l'erreur d'interpolation. Le concept de complexité de maillage est lié au nombre de nœuds ou, dans notre contexte, au nombre de particules lagrangiennes. Le maillage n'est pas unique et dépend de la norme L^p utilisée pour mesurer l'erreur d'interpolation (Chen *et al.*, 2007). Cette technique est intéressante, puisque le choix de la norme L^p appropriée définit l'échelle des structures pouvant être capturées par le maillage. Il a été prouvé que la norme L^∞ est utile pour raffiner dans les régions de fort gradient, et puisque les LCS sont caractérisées par des crêtes importantes, nous avons choisi cette norme pour le calcul de l'erreur d'interpolation. Il est cependant intéressant de comparer les solutions obtenues pour différentes normes et ceci est présenté à la section 4.2.

Pour comprendre la méthodologie de Alauzet *et al.* et Loseille, nous commençons par considérer une fonction scalaire $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, au moins de classe C^2 . Un maillage d'éléments finis linéaires est alors construit en subdivisant le domaine Ω en plusieurs éléments (triangles ou tétraèdres) afin de minimiser l'erreur d'interpolation dans la norme L^p . De toute évidence, une contrainte doit être ajoutée sur le nombre de nœuds, ou de façon équivalente la complexité du maillage, puisque la solution de ce problème serait d'ajouter un nombre infini de nœuds. Pour ce problème, la métrique optimale qui mène à l'obtention d'un maillage optimal est définie comme suit :

Définition 5 *La construction de la métrique optimale continue est basée sur l'hypothèse que la fonction f , approximée par une fonction linéaire par morceaux, est de classe C^2 .*

La métrique optimale $\mathcal{M}_f^{\text{opt}}$ en dimension n est donnée par :

$$\mathcal{M}_f^{\text{opt}}(\mathbf{x}) = D_{L^p} \det(\|\mathcal{H}(f)\|)^{\frac{-1}{2p+n}} \|\mathcal{H}(f)\|, \quad (3.17)$$

$$\text{avec } D_{L^p} = \frac{\mathcal{N}_n^{\frac{2}{n}}}{\left(\int_{\Omega} \det(\|\mathcal{H}(f)\|)^{\frac{p}{2p+n}} d\Omega\right)^{\frac{2}{n}}} \quad (3.18)$$

$$\text{et } \|\mathcal{H}(f)\| = R^t \begin{pmatrix} \|\lambda_1\| & 0 & \cdots \\ 0 & \|\lambda_2\| & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix} R. \quad (3.19)$$

Avec λ_i les valeurs propres de $\mathcal{H}(f)$, \mathcal{N} la complexité du maillage, p le paramètre de la norme L^p et n la dimension du domaine Ω . Le développement mathématique qui amène à ces expressions est trop long pour être détaillé ici. Il fait cependant l'objet de l'Annexe-A.

Notons que la complexité du maillage peut être calculée directement à partir de n'importe quel champ de métrique \mathcal{M} avec la relation :

$$\mathcal{N} = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathcal{M})} d\Omega \quad (3.20)$$

où $\sqrt{\det(\mathcal{M})}$ est simplement la densité du maillage, ou dans notre contexte, une mesure de la densité des particules lagrangiennes. Il a été observé par Loseille que la complexité du maillage est, en fait, proportionnelle au nombre de nœuds dans le maillage d'un problème spécifique.

Remarque 2 Afin d'éviter les problèmes lors du remaillage, il est préférable de limiter l'étirement minimal et maximal permis. Comme les longueurs dans le domaine physique sont mesurées à l'aide de la métrique, on peut établir qu'une valeur propre λ correspond à une longueur h à l'aide de la relation suivante :

$$h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.21)$$

De l'équation (3.21), on peut limiter l'étirement à l'aide de l'algorithme suivant avant de former $\mathcal{M}_f^{\text{opt}}$ présentée à l'équation (3.17) :

$$\lambda_i = \min \left(\max \left(\lambda_i, \frac{1}{h_{\max}^2} \right), \frac{1}{h_{\min}^2} \right). \quad (3.22)$$

Les paramètres h_{\min} et h_{\max} sont respectivement les longueurs des arêtes minimales et maximales permises pour le maillage adapté.

La généralisation de l'adaptation de maillage basée sur les métriques pour une fonction vectorielle $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, est plutôt simple mais nécessite une étape supplémentaire. Nous observons que pour chaque composantes f_i , nous pouvons définir une métrique optimale $\mathcal{M}_{f_i}^{\text{opt}}$ avec la méthodologie ci-dessus (Définition 5). Cependant, nous devons combiner tous ces paramètres en une seule métrique afin de construire un maillage unique. Ceci est réalisé grâce à l'intersection de métriques (George et Frey, 2008), qui est symboliquement écrite comme $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{f_1}^{\text{opt}} \cap \mathcal{M}_{f_2}^{\text{opt}} \cap \dots$. D'un point de vue géométrique, *e.g.* pour un problème en deux dimensions, l'intersection de métriques consiste à la construction de la plus grande ellipse qui peut être incluse à l'intersection des deux ellipses décrites par les métriques, comme présenté à la figure 3.3.

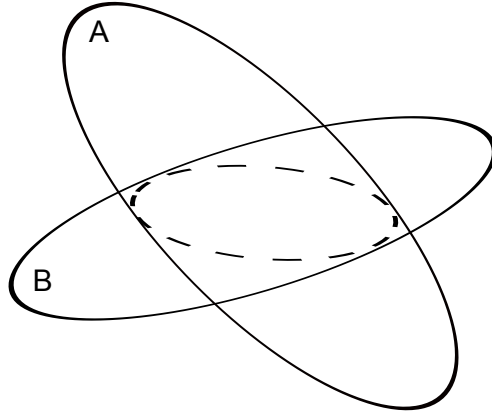


FIGURE 3.3 Représentation géométrique de l'intersection de deux métriques

Si plus de deux métriques doivent être combinées, la solution n'est plus unique comme illustré sur la figure 3.4. Les trois ellipses de couleurs différentes représentent les trois combinaisons possibles pour l'intersection de la métrique finale :

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_A \cap (\mathcal{M}_B \cap \mathcal{M}_C); \quad (3.23)$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_B \cap (\mathcal{M}_A \cap \mathcal{M}_C); \quad (3.24)$$

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_C \cap (\mathcal{M}_A \cap \mathcal{M}_B). \quad (3.25)$$

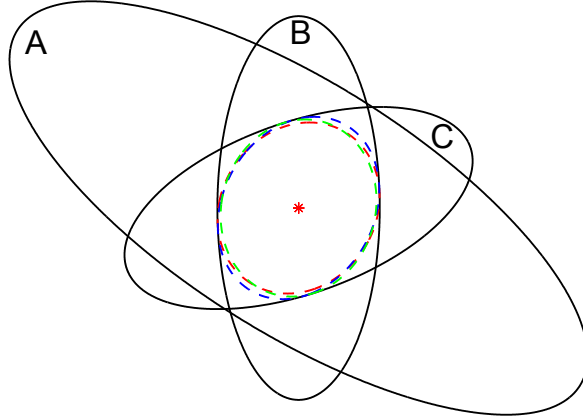


FIGURE 3.4 Solutions de l'intersection de trois métriques

Nous avons effectué des tests avec différentes ellipses initiales afin de vérifier l'effet de l'ordre d'intersection sur la métrique résultante et d'éventuellement déterminer un ordre optimal. Le premier test, dont les résultats sont présentés sur la figure 3.5, a été effectué avec les trois métriques (ellipses) suivantes :

- \mathcal{M}_1 avec un grand rayon $a = 1$ et un petit rayon $b = 0.3$;
- \mathcal{M}_2 avec un grand rayon $a = 1$ et un petit rayon $b = 0.2$;
- \mathcal{M}_3 avec un grand rayon $a = 1$ et un petit rayon $b = 0.1$.

Les ellipses possèdent des aires différentes avec $\text{Aire}_{\mathcal{M}_1} > \text{Aire}_{\mathcal{M}_2} > \text{Aire}_{\mathcal{M}_3}$. Afin de vérifier l'ordre dans lequel il est préférable d'intersecter les ellipses, il faut initialement poser des critères optimaux. Le but de l'adaptation de maillage anisotrope, est d'optimiser la grille de calcul en étirant les triangles afin de diminuer l'erreur d'interpolation. Donc, lors de l'intersection de plusieurs métriques, il est préférable de conserver le plus d'étirement possible permettant ainsi de mieux distribuer les nœuds dans le domaine. De plus, afin de conserver le plus d'information des métriques initiales, la métrique résultante devrait avoir la plus grande surface possible, comme ce qui est réalisé avec deux métriques.

Ces deux critères seront donc vérifiés en faisant tourner d'un angle \mathcal{L} ($[0^\circ, 360^\circ]$ par variation de 1°) chacune des ellipses. Il y a donc un nombre de combinaisons possibles de 360^3 . À chacune de ces étapes, on vérifie laquelle des méthodes d'intersection permet la création de l'ellipse la plus étirée et avec la plus grande surface.

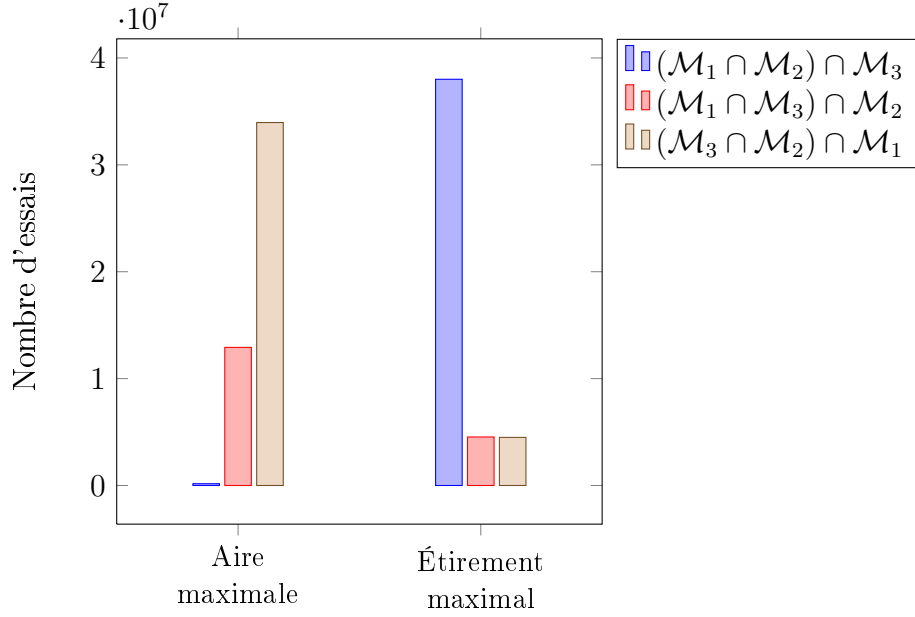


FIGURE 3.5 Intersection de métriques (Test #1)

À partir des résultats montrés sur la figure 3.5, l'ordre optimal dépend du critère sélectionné. Pour obtenir une ellipse avec un aire maximale, dans la majorité des cas, il est préférable d'intersecter l'ellipse résultant de l'intersection des deux plus petites ellipses avec la plus grande. Au contraire, pour obtenir un étirement maximal, il est préférable d'intersecter l'ellipse résultant de l'intersection des deux plus grandes ellipses avec la plus petite.

Le deuxième test, dont les résultats sont présentés sur la figure 3.6, a été effectué avec les trois métriques (ellipses) suivantes :

- \mathcal{M}_1 avec un grand rayon $a = 2$ et un petit rayon $b = 0.3$;
- \mathcal{M}_2 avec un grand rayon $a = 1.5$ et un petit rayon $b = 0.4$;
- \mathcal{M}_3 avec un grand rayon $a = 0.5$ et un petit rayon $b = 0.1$.

Ce deuxième test nous donne le même résultat pour le critère d'étirement maximal mais un résultat différent pour l'obtention d'une ellipse avec une aire maximale.

Ces tests montrent qu'il n'y a pas de règles préétablies. En effet, comme les résultats varient selon le critère sélectionné, *i.e.* l'étirement maximal ou l'aire maximale, et comme la forme et l'orientation des métriques initiales sont aussi des critères importants, nous avons décidé d'intersecter tout simplement les trois métriques dans l'ordre,

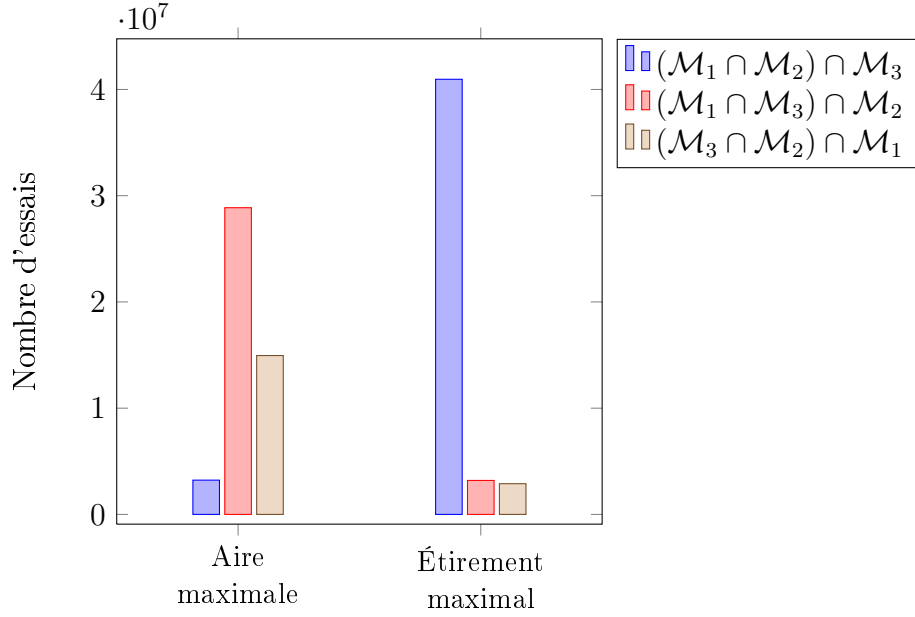


FIGURE 3.6 Intersection de métriques (Test #2)

$(M_1 \cap M_2) \cap M_3$. L'algorithme du programme final est présenté sur la figure 3.7. Bien que cet algorithme ne soit pas optimal, il ne nécessite aucun traitement supplémentaire et a très peu d'effet global. L'erreur qui en résulte est négligeable par rapport aux erreurs engendrées par l'interpolation des vitesses et des dérivées, mais il serait intéressant, dans un projet futur, de déterminer un algorithme efficace afin d'assurer l'intersection optimale des métriques :

$$\mathcal{M}^{\text{opt}} = (\mathcal{M}_x^{\text{opt}} \cap \mathcal{M}_y^{\text{opt}}) \cap \mathcal{M}_z^{\text{opt}}. \quad (3.26)$$

3.4 Estimation d'erreur

L'erreur d'interpolation est classiquement exprimée en fonction de la taille de l'élément maximal h (Johnson, 1992). Pour une interpolation linéaire, nous avons que :

$$\|f - \pi f\|_{L^p(\Omega)} \leq C h^2 \|u\|_2 \quad (3.27)$$

avec C une constante indépendante de la solution et h la longueur caractéristique de l'élément.

Cela implique simplement que, dans la région asymptotique, l'erreur globale est divisée

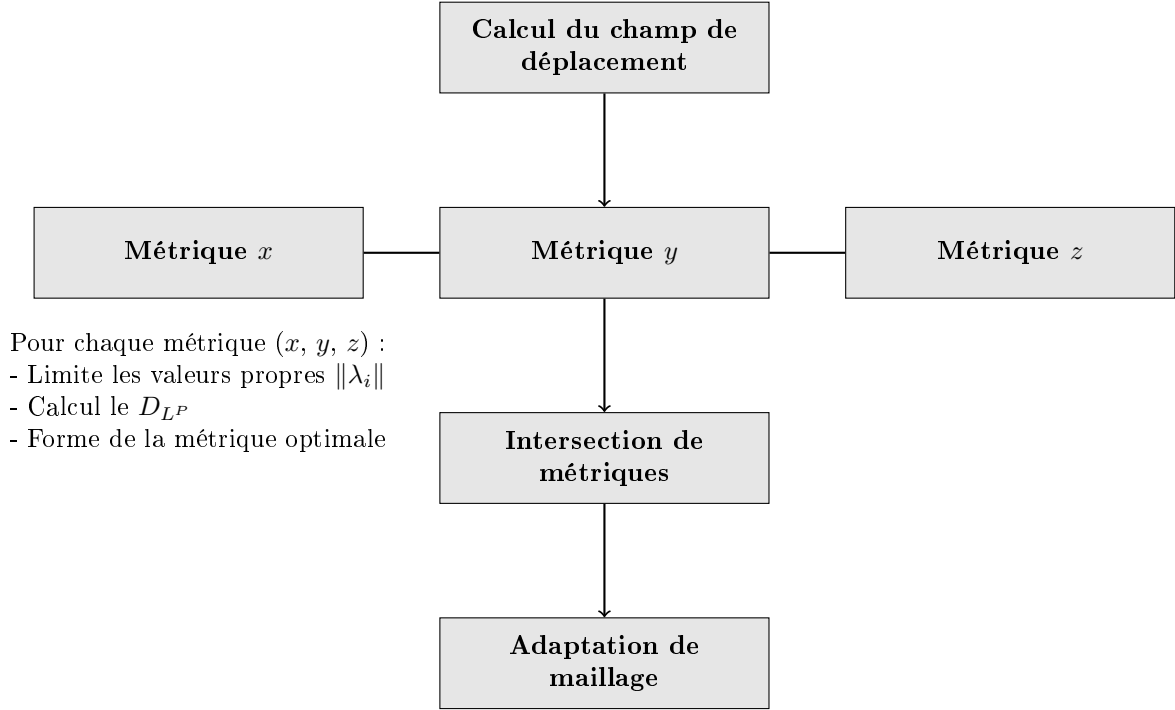


FIGURE 3.7 Algorithme pour le calcul de la métrique optimale (\mathcal{M}^{opt})

par 4 si toutes les arêtes sont uniformément divisées par 2. Dans un maillage 2D triangulaire, les éléments sont divisés en quatre triangles congrus. Toutefois, pour des maillages tétraédriques, ce n'est pas aussi facile à réaliser et en général, quand un maillage non structuré est utilisé, la taille maximale des éléments n'est pas un paramètre adéquat pour suivre la convergence de la qualité de la solution. Le paramètre de choix est alors la complexité de maillage, et la métrique (Eq. 3.17) est utilisée pour construire une séquence de maillages avec la même orientation et les mêmes coefficients anisotropes qui satisfont les estimations d'erreur de Loseille (2008) :

$$\|f - \pi f\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{C}{\mathcal{N}^{2/n}} \quad (3.28)$$

avec C une constante indépendante de la solution et \mathcal{N} la complexité du maillage et n la dimension de l'espace.

Il est intéressant de noter que Akin (2005) a suggéré que $h \approx \frac{1}{N_v^{2/n}}$, avec N_v le nombre de sommets. Cela mène à un résultat semblable à l'équation (3.28) puisque $N_v \propto \mathcal{N}$. Cependant, l'équation (3.28) n'est valide que si les mailles sont positionnées à l'aide d'une métrique optimale, un fait non précisé par Akin. Par exemple, si les dérivées partielles de

f sont constantes dans la direction y , une augmentation de la densité du maillage dans cette direction n'entraînera pas la réduction de l'erreur globale. Cette situation est évitée avec l'utilisation d'une métrique optimale tel qu'observé à la section 4.1.

Nous rappelons encore une fois que dans la théorie d'interpolation linéaire classique (Johnson, 1992), l'erreur d'interpolation de la projection d'une valeur f_i connue aux nœuds d'un élément \mathcal{K} (notée πf_i) par rapport à sa valeur constante sur cet élément s'exprime par :

$$(f_i - \pi f_i)(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^{n_v} L_j(\mathbf{x}) R_j(\mathbf{x}); \quad (3.29)$$

$$R_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^j - \mathbf{x})^t \mathcal{H}(f_i) \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) (\mathbf{a}^j - \mathbf{x}) \quad (3.30)$$

avec n_v le nombre de fonctions d'interpolation linéaire de Lagrange L_j , \mathbf{a}^j les sommets de l'élément et $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})$ une fonction quelconque définie sur l'élément \mathcal{K} .

Nous notons que l'adaptation de maillage utilisant des métriques est basée sur une approximation de la matrice hessienne connue uniquement aux sommets des éléments du maillage. À l'intérieur du domaine, l'approximation suivante est utilisée :

$$\mathcal{H}(f_i) \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{n_v} L_j(\mathbf{x}) \mathcal{H}(f_k)_j \quad (3.31)$$

avec $\mathcal{H}(f_k)_j$ la valeur du hessien aux sommets des éléments. Ceci permet une estimation simple de l'erreur d'interpolation $\|\mathbf{f} - \pi \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$ (voir la Remarque 4) qui sera utilisée pour exprimer la convergence du maillage en fonction du nombre de nœuds. Comme la matrice hessienne est préalablement déterminée pour la construction de la métrique, le calcul de l'erreur d'interpolation se fait avec un coût de calcul supplémentaire très faible.

Remarque 3 *En pratique, la métrique en norme L^∞ est approximée en remplaçant p dans l'équation 3.17 par un nombre suffisamment grand. Durant nos essais numériques, nous avons sélectionné $p = 100$.*

Remarque 4 *En théorie, on devrait calculer l'estimation d'erreur avec la même norme utilisée par le modèle d'erreur qui conduit à la construction de la métrique en norme L^p . Toutefois, comme le champ de déplacement est de classe $C^2(D)$, toutes les normes L^p sont équivalentes pour $1 \leq p < \infty$ et on peut donc choisir la plus pratique. Nous avons donc sélectionné la norme L^2 puisque l'intégration nécessite moins de points de Gauss pour obtenir une approximation adéquate.*

Remarque 5 *L'équation (3.28) prédit un taux de convergence quadratique. Toutefois, il est habituel d'étudier la convergence de maillage en fonction de sa complexité \mathcal{N} (ou simplement du nombre de nœuds). En conséquence, la pente de la courbe de régression devient $p = -1$ en 2D et $p = -\frac{2}{3}$ en 3D.*

3.5 Parallélisation des algorithmes

Le calcul de l'exposant de Lyapunov est particulièrement coûteux (*cf.* Sec. 3.2). Si l'écoulement est instationnaire, il doit être répété à chaque étape de temps. Afin d'accélérer les calculs, les algorithmes ont été parallélisés à l'aide de l'outil *C/C++ OpenMP* qui permet une parallélisation rapide d'algorithmes séquentiels. Comme les calculs des trajectoires des particules d'un domaine sont indépendants les uns des autres, il est efficace de diviser les calculs en plusieurs fils d'exécution (*thread*) sur des processeurs/cœurs indépendants.

Avant d'observer les gains obtenus, il est important de rappeler que le gain optimal est limité, en partie, par la fraction du code qui n'est pas parallélisée. La loi d'*Amdahl* permet d'exprimer le gain G en fonction du nombre de fils d'exécution p (en négligeant le temps nécessaire à la gestion du parallélisme) :

$$G = \frac{t_s}{t_p} = \frac{t_s}{(1-f)t_s + \frac{ft_s}{p}} = \frac{1}{(1-f) + \frac{f}{p}} \quad (3.32)$$

avec t_s le temps de calcul pour le code séquentiel, t_p le temps de calcul pour le code parallèle, f la fraction temporelle du code parallélisée.

Remarque 6 *À titre d'exemple, lorsque 75% du temps de calcul est parallélisé ($f = 0.75$), le gain maximal serait de 4 sur un système avec un nombre de processeurs très élevé ($p \rightarrow \infty$).*

La figure 3.8 montre le temps de calcul en fonction du nombre de fils d'exécution pour un calcul sur une grille de 1,8 millions de particules effectué sur deux machines différentes. La première machine est un ordinateur de bureau équipé d'un processeur hexa-cœurs *Intel Core i7-980X Extreme Edition (12M cache, 3.33ghz, Turbo 3.6ghz)*. La deuxième machine est un serveur équipé de 8 processeurs octo-cœurs *Intel Xeon X7550 (18M cache, 2.00ghz, Turbo 2.4ghz)*.

On remarque que le temps de calcul en séquentiel est plus court sur l'ordinateur de bureau puisque la cadence du processeur (*Intel Core i7-980X*) est plus élevée. Lorsqu'on

utilise 12 fils d'exécution (le maximum de l'ordinateur de bureau), les deux machines prennent environ 2 min pour effectuer les calculs. En augmentant le nombre de fil d'exécution sur le serveur, le temps de calcul minimum est de 64 s, soit ~ 10 fois plus rapide que le temps séquentiel. Avec plus de 100 fils d'exécution, le temps de calcul est limité par les temps de lecture et d'écriture qui deviennent de plus en plus importants. Il est certain que la performance du calcul pourrait encore être améliorée, mais pour les problèmes traités dans le cadre de ce mémoire, les résultats sont plus que satisfaisants.

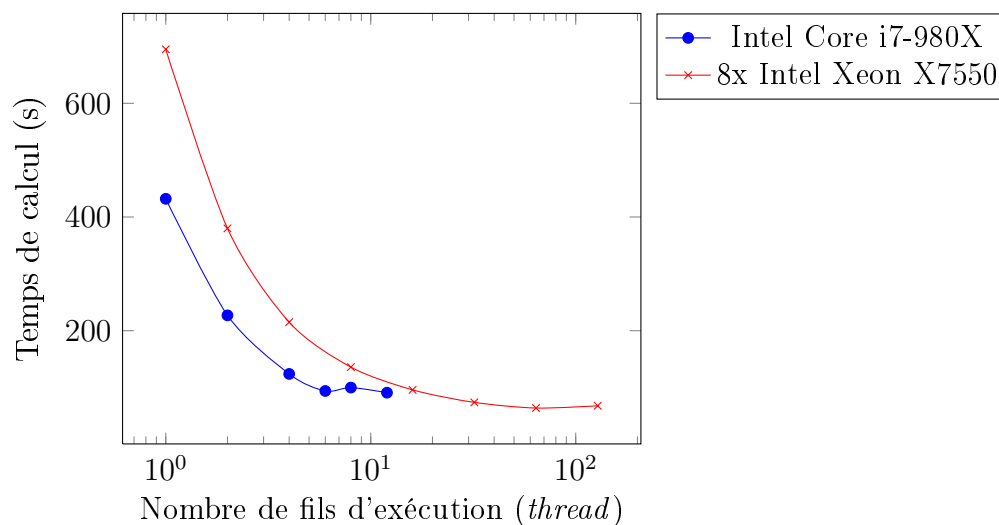


FIGURE 3.8 Évolution du temps de calcul avec le nombre de fils d'exécution sur des machins parallèles

Chapitre 4

Applications en dynamique des fluides

L'efficacité de la procédure détaillée dans les sections précédentes est étudiée dans ce chapitre sur des écoulements décrits par des champs de vitesse analytiques en deux et trois dimensions (Sec. 4.2) et expérimentaux (Sec. 4.3). Dans un premier temps, la vérification et la validation de la méthode d'adaptation de maillage sont démontrées à l'aide de fonctions analytiques.

4.1 Vérification et validation

Plusieurs essais ont été préalablement effectués avec des fonctions analytiques afin de vérifier et valider les algorithmes. La matrice hessienne de ces fonctions a été calculée afin d'adapter le maillage et de calculer l'erreur d'interpolation. Les fonctions suivantes ont été utilisées :

- $f_1(x, y, z) = \tanh((x + 1.3)^{20} \cdot (y - 0.3)^9 \cdot z^4)$;
- $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
- $f_3(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$;
- $f_4(x, y, z) = \sin(xyz)$.

Les erreurs ainsi obtenues sont tracées sur la figure 4.1. Pour la première fonction, où les gradients sont très élevés dans certaines régions du domaine, l'erreur obtenue avec un maillage adapté anisotrope est d'un ordre de grandeur plus faible qu'avec un maillage isotrope. Dans les autres cas, les erreurs sont comparables bien que celles obtenues avec un maillage anisotrope soient supérieures. Cependant, le taux de convergence n'est pas optimal en utilisant une subdivision isotrope comme expliqué à la section 3.4. Ce problème est cependant résolu en positionnant les nœuds à l'aide d'une métrique optimale puisque qu'une convergence égale à la convergence théorique en norme H_1 (schématisé par la droite de référence) est obtenue pour tous les maillages anisotropes.

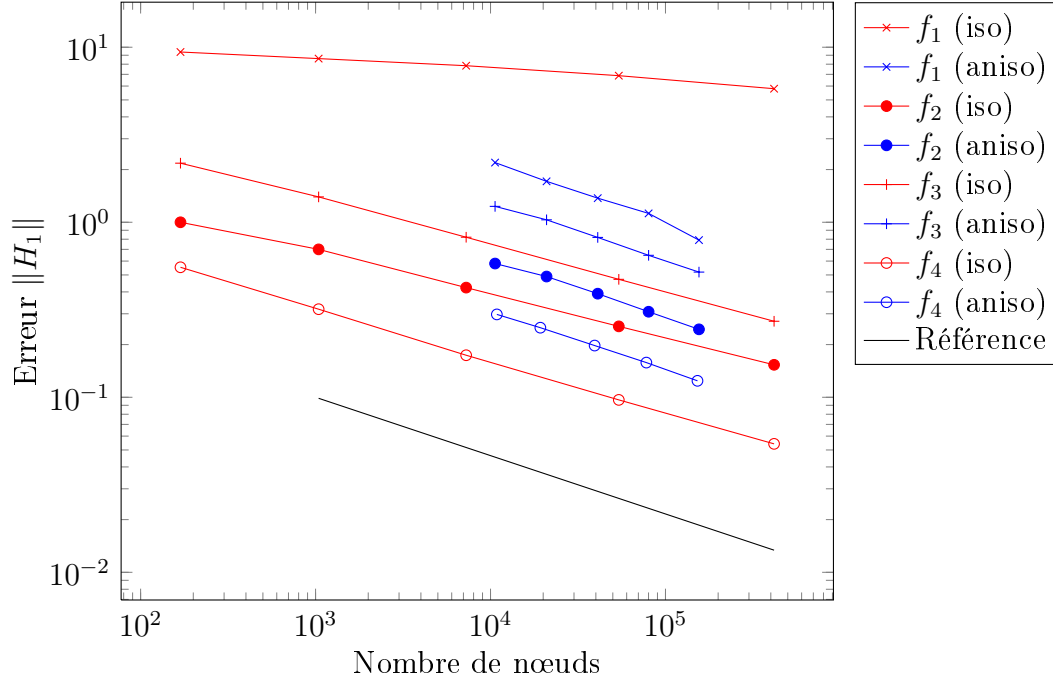


FIGURE 4.1 Convergence des fonctions tests lors de l'adaptation isotrope

4.2 Exemples de fonctions analytiques

L'efficacité de la procédure complète est étudiée initialement avec des champs de vitesse analytiques de classe C^∞ dans l'espace et dans le temps. Ces champs de vitesse sont définis dans $U \equiv \mathbb{R}^n$ où les particules circulent librement. Le maillage est alors adapté à des structures évoluant dans le temps à l'intérieur du domaine de calcul $D \subset U$. Il est donc possible pour ces cas analytiques de déterminer la position finale des particules durant l'intégration de t_0 à $t_0 \pm \mathcal{T}$ même si les particules quittent le domaine de calcul D . Par conséquent, le champ d'écoulement satisfait les hypothèses (1-3) et permet d'obtenir un champ *FTLE* bien défini.

Dans ces expériences numériques, le champ de vitesse et ses dérivées sont calculés analytiquement afin d'éviter l'introduction de tout biais introduit par l'interpolation et la reconstruction des dérivées à partir d'une approximation discrète du champ de vitesse. Cela implique que l'erreur introduite lors de la résolution des équations (3.1),(3.13) et (3.15) ne dépend que de l'exactitude du pas de temps (Δt) utilisé lors de l'intégration en temps. Afin de réduire cette erreur au minimum, nous avons choisi d'utiliser l'algorithme explicite de Butcher des équations de type Runge-Kutta du cinquième ordre (Chapra et

Canale, 1988).

Puisque nous utilisons un nombre fini de particules afin de définir une maille, l'erreur globale est estimée par $E \approx \mathcal{O}(\Delta t^5, 1/N^{2/n})$ (cf. Sec. 3.4). Le premier terme correspond à l'erreur d'intégration en temps, tandis que le second résulte de l'interpolation linéaire du champ de déplacement. Si le pas de temps est bien choisi, l'erreur de discrétisation dans le temps devient négligeable par rapport à l'erreur d'approximation par éléments finis, et nous devrions nous attendre à ce que $E \propto 1/N^{2/n}$, à chaque pas de temps, en calculant l'erreur d'interpolation avec la procédure décrite dans la section 3.3.

Dans ces conditions optimales, nous allons examiner plus spécifiquement la fiabilité de l'adaptation de maillage du *FTLE* basée sur l'estimation du champ de déplacement. Trois exemples analytiques seront utilisés à cet effet dans la section suivante.

4.2.1 Champs bidimensionnels

Double-gyre

Ce champ de vitesse est maintenant un classique dans le domaine des structures lagrangiennes cohérentes. Introduit par Shadden *et al.* (2005), ce champ a été utilisé depuis par de nombreux auteurs pour comparer les méthodes de calcul entre elles. Il est caractérisé par deux tourbillons contrarotatifs et sert souvent à modéliser des courants marins. Celui-ci est défini par la fonction de courant suivante :

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= A \sin(\pi f(x, t)) \sin(\pi y), \\ \text{avec } f(x, t) &= \epsilon \sin(\omega t) x^2 + (1 - 2\epsilon \sin(\omega t)) x \end{aligned} \quad (4.1)$$

donnant les composantes de vitesse :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\pi A \sin(\pi f(x, t)) \cos(\pi y); \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = \pi A \cos(\pi f(x, t)) \sin(\pi y) \frac{\partial f}{\partial x}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

sur le domaine D défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq 2) \ \& \ (0 \leq y \leq 1)\}. \quad (4.3)$$

Le double-gyre offre l'avantage d'avoir des vitesses frontières tangentes aux bords du

domaine D . En prenant un pas de temps assez court lors du calcul des trajectoires, les particules ne peuvent donc sortir du domaine de calcul D . La figure 4.2 présente quelques exemples de champs $FTLE$ obtenus pour différents temps d'intégration \mathcal{T} . Les LCS , révélées par les plus grandes valeurs du $FTLE$, s'affine peu à peu en augmentant \mathcal{T} comme le montre la figure 4.2d. Cette caractéristique permet de pousser au maximum les outils développés lorsque le temps d'intégration est très élevé et où un maillage régulier devient inadéquat puisqu'il ne permet plus de capter les structures adéquatement. La figure 4.3a-b présente respectivement une vue 2D et 3D du même champ $FTLE$ présenté à la figure 4.2d. La disposition uniforme des nœuds entraîne des oscillations très importantes que l'on observe aux voisinages des LCS . De plus, loin de ces crêtes, les valeurs du champ sont faibles, ce qui justifie et montre l'intérêt d'utiliser les techniques d'adaptation de maillage, en particulier anisotrope, pour le calcul du $FTLE$.

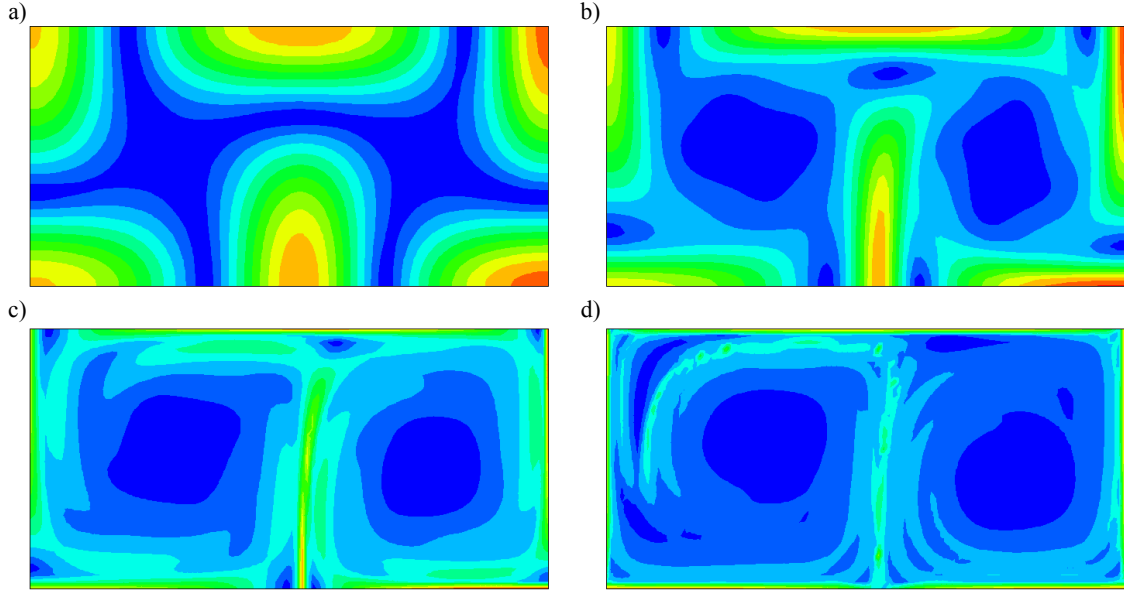


FIGURE 4.2 Calcul du champ $FTLE$ pour un temps d'intégration (\mathcal{T}) de 1 s en a), 2.5 s en b), 5 s en c) et 10 s en d) appliqué à l'écoulement du double-gyre.

Cette fonction avait été utilisée dans le mémoire de maîtrise de Bélanger (2010) et avait permis de montrer l'efficacité de l'adaptation de maillage basée sur la matrice hessienne de l'exposant de Lyapunov ($\mathcal{H}(\sigma_{t_0}^T)$). Le $FTLE$ présenté sur la figure 4.4a, a été obtenu en utilisant les équations analytiques du champ de vitesse mais aussi de ses dérivées premières et secondes afin que l'erreur sur le champ $FTLE$ ne dépende que du

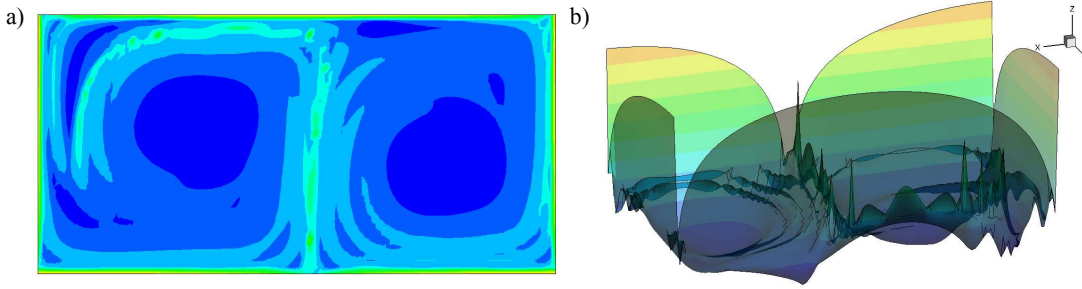


FIGURE 4.3 Représentation 3D du même champ $FTLE$ présenté à la figure 4.2d calculé avec un temps d'intégration (\mathcal{T}) de 10s. En a) la représentation 2D et en b) la représentation 3D.

pas de temps (Δt) utilisé lors du calcul des trajectoires des particules. En prenant un temps d'intégration numérique assez faible ($\Delta t = 0.0001$ s), l'erreur est pratiquement nulle. Ce résultat (Fig. 4.4a) a ensuite été comparé à un champ $FTLE$ obtenu (Fig. 4.4b) à l'aide d'un champ de vitesse discret de la même solution. Dans ce cas, les dérivées sont calculées discrètement et sont interpolées, tout comme les vitesses dans le calcul des trajectoires, lors de la résolution des systèmes d'équations (3.1), (3.13) et (3.15). On peut s'apercevoir que les résultats sont identiques.

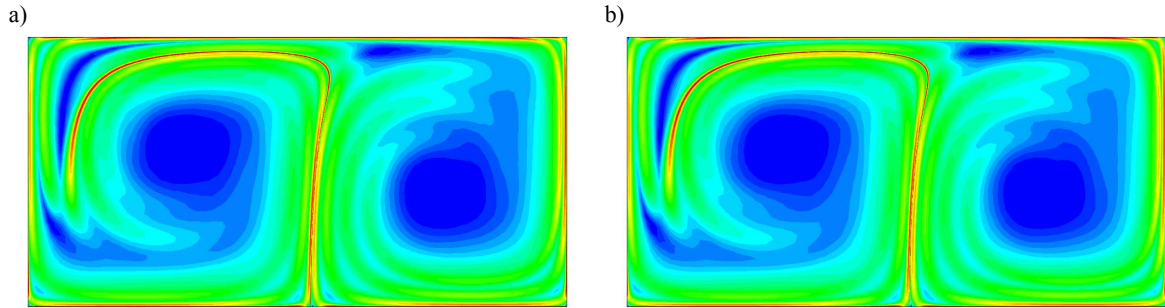


FIGURE 4.4 Champ $FTLE$ identique à celui de la figure 4.2d. En a), aucune interpolation n'est effectuée sur les vitesses ainsi que sur les dérivées spatiales. En b), les vitesses sont interpolées à partir d'une grille de valeurs discrètes et les dérivées premières et secondes sont estimées à l'aide de formules de différences finies.

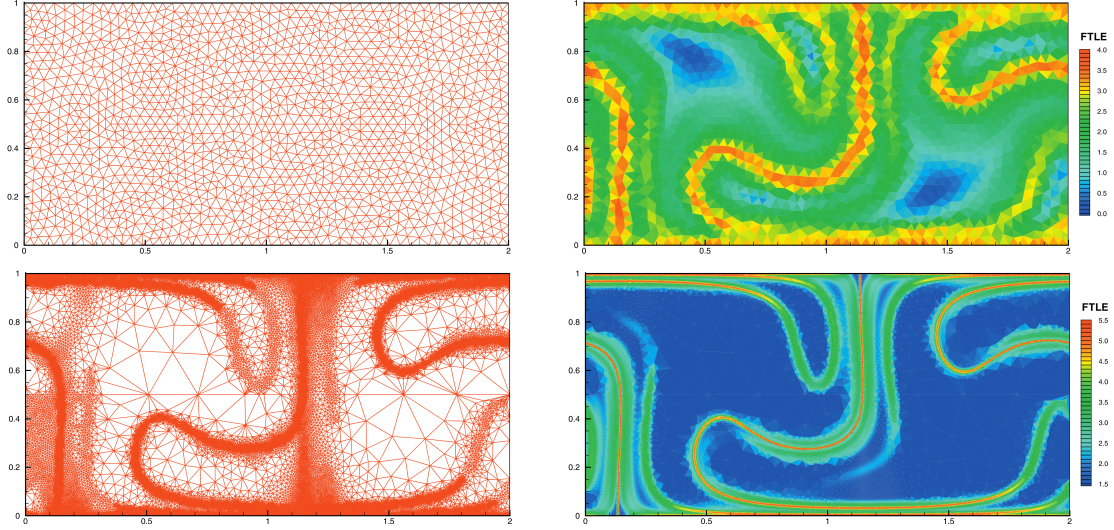


FIGURE 4.5 Démonstration de l'adaptation de maillage sur le gyre quasi-périodique par Lekien et Ross (2010)

Modèle analytique de la convection de Rayleigh-Bénard

Solomon et Gollub (1988a,b) ont décrit un modèle simplifié 2D de l'écoulement dans les cellules de convection de Rayleigh-Bénard, où le champ de vitesse est dérivé de la fonction de courant suivante :

$$\begin{aligned}\psi(x, y, t) &= \sin(\pi(x - g(t))) \sin(\pi y); \\ g(t) &= 0.3 \sin(4t) + 0.1 \sin(2t)\end{aligned}\tag{4.4}$$

avec $g(t)$ une fonction qui génère un mouvement oscillatoire des cellules. L'écoulement est périodique en x :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}(x + 2n, y, t) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}\tag{4.5}$$

et est borné par deux lignes de courant indépendantes du temps, en $y = 0$ et $y = 1$, ce qui restreint le mouvement des *LCS*. Le domaine de calcul D est défini afin de capter toutes les structures de l'écoulement :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq 2) \ \& \ (0 \leq y \leq 1)\}.\tag{4.6}$$

Le temps initial ($t_0 = 0.5$ s) et le temps d'intégration ($\mathcal{T} = 1$ s) des simulations numériques ont été choisis afin de comparer nos résultats avec ceux obtenus par Lekien et Ross (2010) qui ont utilisé une méthode d'adaptation de maillage isotrope sur ce même écoulement. Les résultats, présentés sur la figure 4.6, sont calculés avec $\Delta t = 1/75$ s.

Afin de pouvoir comparer nos résultats avec des travaux de la littérature, nous avons calculé le champ $FTLE$ sur un maillage cartésien régulier avec 20 000 nœuds (200 par 100) avec la méthode initiale de Shadden *et al.* (2005). La figure 4.6a présente les contours du champ $FTLE$, tandis que la figure 4.6b est une représentation en 3D de celui-ci. Dans celle-ci, les LCS apparaissent une nouvelle fois comme des crêtes définies par les valeurs maximales de l'exposant de Lyapunov. L'approximation de la dérivée sur la grille initiale (Fig. 4.6b), obtenue à l'aide des différences finies du champ de déplacement, lisse le champ $FTLE$, contrairement à la solution convergée de la figure 4.6e. En revanche, le champ $FTLE$ de la figure 4.6c a été calculé sur la même grille avec les équations (3.1), (3.13) et (3.15) et constitue l'alternative que nous proposons, car elle résout les dérivées le long des trajectoires de particules. Lorsque le maillage est grossier, on remarque des irrégularités le long des crêtes du $FTLE$ mais celles-ci disparaissent lorsque le maillage est suffisamment fin pour capturer les gradients du champ $FTLE$. L'avantage de l'adaptation de maillage anisotrope basée sur une métrique L^∞ est révélé dans la figure 4.6d, qui montre une grille de 20 394 nœuds répartis de manière optimale. Cette grille, avec pratiquement le même nombre de nœuds que pour le maillage cartésien, est capable de capturer l'intensité du champ $FTLE$ avec précision sur tout le domaine de calcul. Cependant, un examen attentif des crêtes révèle de petites irrégularités, une conséquence des gradients importants du champ de déplacement autour des LCS . Ceci peut être corrigé par le choix d'un temps d'intégration (\mathcal{T}) plus petit, ce qui aurait comme effet d'aplatir les crêtes, ou en augmentant la complexité (ou de manière équivalente le nombre de nœuds) du maillage anisotrope, comme le montre la figure 4.6e, où le maillage comprend 104 687 nœuds.

Dans la figure 4.6d, le maillage est composé de 20 394 nœuds et 38 236 éléments anisotropes. Ceci est approximativement 30 % de moins que le meilleur maillage adaptatif isotrope de Lekien et Ross (2010) pour une représentation comparable du champ $FTLE$. Il est important de souligner qu'ils n'ont fourni aucune méthode d'estimation d'erreur liée à leur processus d'adaptation. Ainsi, sans le bénéfice d'une méthode d'estimation d'erreur commune, il est difficile de comparer quantitativement ces deux méthodes d'adaptation appliquées à la reconstruction du champ $FTLE$. Cependant, la littérature des dernières

années sur l'adaptation de maillage (George et Frey, 2008) indique clairement que, pour des complexités de maillages identiques, l'erreur liée au maillage anisotrope est inférieure à celle liée au maillage isotrope et permet l'obtention d'une meilleure solution.

La figure 4.7 présente le maillage de la figure 4.6d superposé aux contours du champ *FTLE*. Nous constatons que les éléments sont plus denses près des crêtes et allongés dans la direction tangentielle à celles-ci, comme prévu par la théorie. Ainsi, l'adaptation sur le champ de déplacement est empiriquement équivalente à l'adaptation sur le champ *FTLE*. Le cadre en bas à gauche (Fig. 4.7) montre en détails le maillage dans une zone traversée par une crête, et le maillage est encore un fois agrandi dans le cadre en bas à droite. Ces zooms montrent que les éléments sont très étirés dans le voisinage des structures de l'écoulement, avec un rapport d'anisotropie maximum $r = h_x/h_y = 1/350\,000$. Augmenter le temps d'intégration affine les *LCS* entraînant un rapport d'anisotropie pouvant atteindre $1/1\,000\,000$, ayant pour conséquence de réduire la fiabilité de nos logiciels d'adaptation (S.A.S., 2003).

Sur la figure 4.8, différents maillages sont présentés en fonction du nombre de nœuds et de la norme L^p utilisée dans la construction des métriques. Dans les quatre premiers encadrés (Figs. 4.8a-d), la norme L^∞ a été utilisée pour détecter les grandes structures *LCS*. En revanche, le cadre en bas à gauche (Fig. 4.8c) montre que la norme L^1 est adaptée à la détection de structures de plus petites échelles et distribue les nœuds de manière plus uniforme à l'intérieur du domaine. Enfin, le dernier encadré en bas à droite (Fig. 4.8d) montre l'erreur d'interpolation du champ de déplacement en fonction du nombre de nœuds N_v . La pente de la droite de régression est de -1, ce qui correspond à une convergence quadratique, comme prédit par la théorie (voir la remarque 5). Cela montre aussi, indirectement, que le pas de temps utilisé est assez petit pour que l'erreur de discrétisation temporelle soit négligeable.

Écoulement en œil de chat

Afin de vérifier le fonctionnement des algorithmes 2D et 3D permettant l'identification des structures lagrangiennes cohérentes, une fonction analytique plus représentative des écoulements tourbillonnaires généralement observés en laboratoire a été utilisée. Le modèle d'écoulement en « œil de chat », développé par Kelvin, décrit une allée de tourbillons périodiques et s'obtient en résolvant les équations d'Euler 2D. La solution a été discrétisée en espace et en temps en tenant compte des résolutions spatiales des données expérimentales (*PIV*) recueillies en laboratoire. Les tourbillons, centrés en $y = 0$, se développent

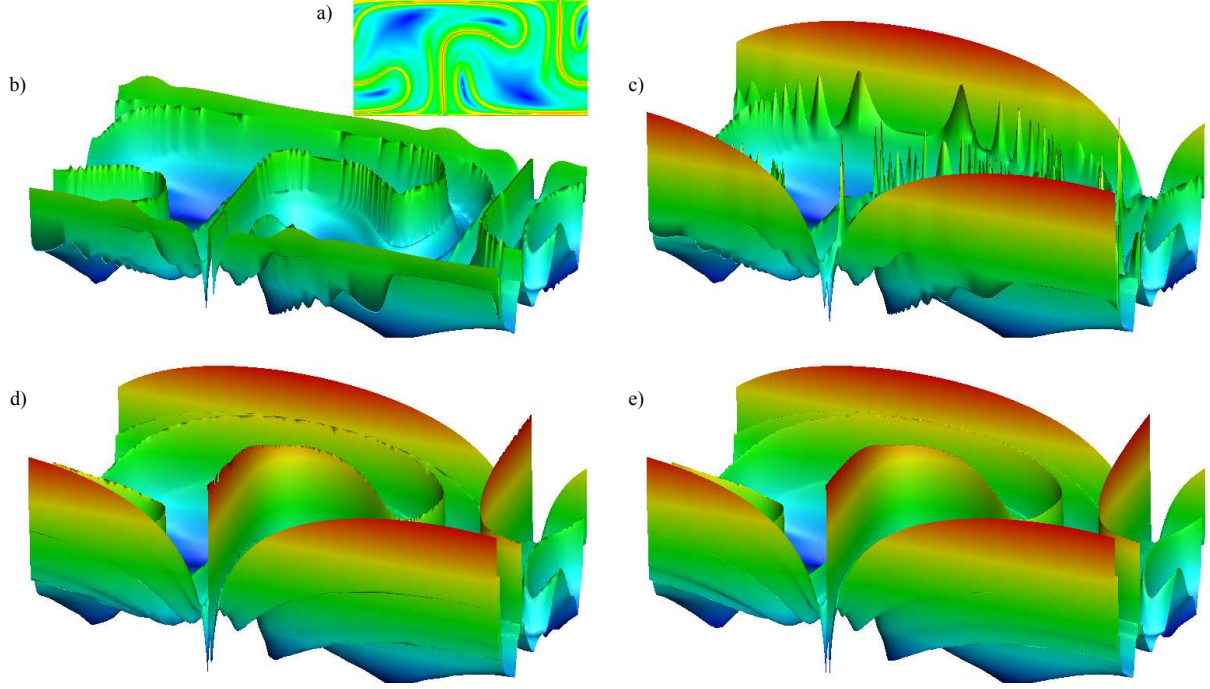


FIGURE 4.6 Champ de vitesse utilisé par Solomon et Gollub (1988a,b) : a) et b) champ $FTLE$ calculé avec la méthodologie de Shadden *et al.* (2005) sur une grille cartésienne de 20 000 nœuds, c) champ $FTLE$ calculé avec les équations 3.1 et 3.13 sur une grille de calcul cartésienne de 20 000 nœuds, d) adaptation en norme L^∞ avec 20 394 nœuds, e) adaptation en norme L^∞ avec 104 687 nœuds.

à l'interface entre deux écoulements parallèles, caractérisés par des vitesses constantes, mais différentes. Dans ce modèle simplifié, le champ de vitesse est dérivé de la fonction de courant suivante :

$$\psi(x, y, t) = -u_c \left[y + \frac{\Lambda}{2\pi} \log \left\{ \cosh \left(\frac{2\pi}{\Lambda} y \right) - A \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} (x - u_c t) \right) \right\} \right]; \quad (4.7)$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_c \left(\frac{\sinh \left(\frac{2\pi y}{\Lambda} \right)}{\cosh \left(\frac{2\pi y}{\Lambda} \right) - A \cos \left(\frac{2\pi (x - u_c t)}{\Lambda} \right)} + 1 \right); \quad (4.8)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{A u_c \sin \left(\frac{2\pi (x - u_c t)}{\Lambda} \right)}{\cosh \left(\frac{2\pi y}{\Lambda} \right) - A \cos \left(\frac{2\pi (x - u_c t)}{\Lambda} \right)} \quad (4.9)$$

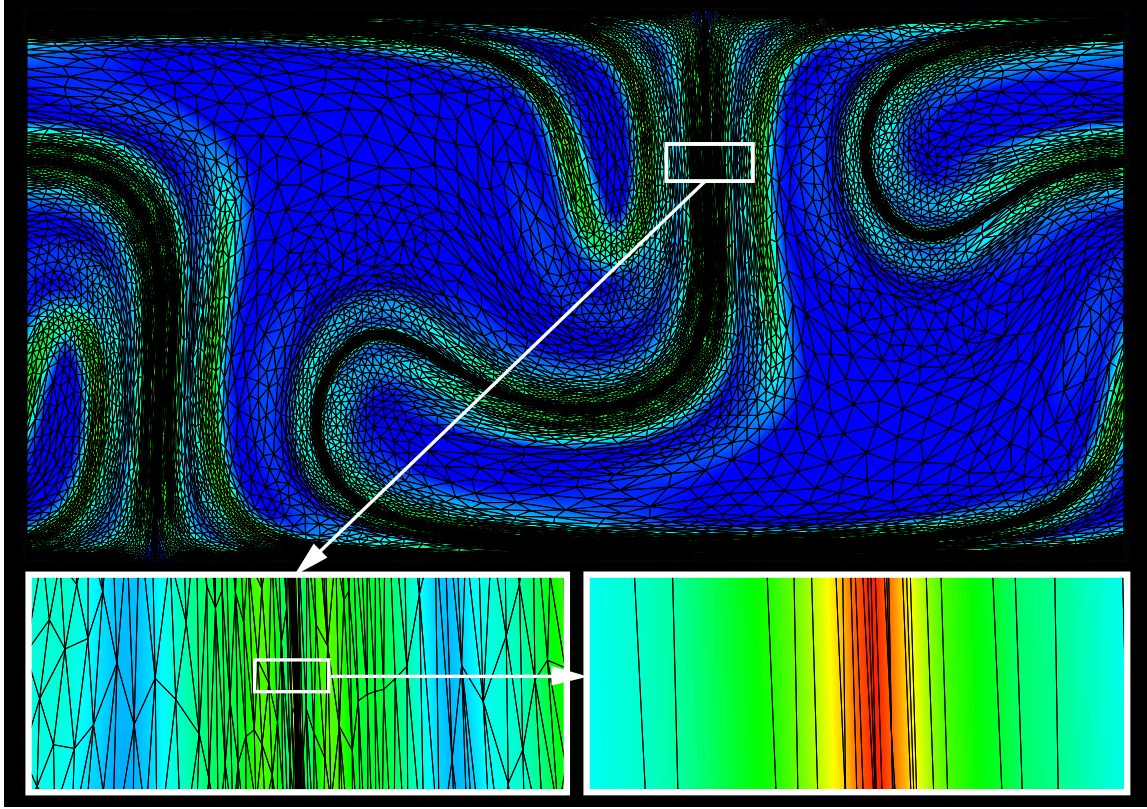


FIGURE 4.7 Maillage adaptatif du champ *FTLE* de Solomon et Gollub avec un rapport d'anisotropie de $1/350\,000$

où A est un paramètre qui caractérise la concentration de la vorticité, u_c est la vitesse de convection des tourbillons et Λ est la distance entre deux tourbillons consécutifs.¹ Pour $A = 1$, la solution est irrotationnelle et se réduit à un train de tourbillons ponctuels ( coulement potentiel) et pour $A \ll 1$, la solution représente une couche de cisaillement plane perturbée périodiquement. L'écoulement est périodique en x :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}(x + n\Lambda, y, t) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.10)$$

avec les valeurs à l'infini suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y, t) = 2u_c \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} u(x, y, t) = 0. \quad (4.11)$$

¹Le choix de cet écoulement a en partie été motivé parce que la solution analytique vérifie l'équation de propagation des ondes planes. Cette spécificité sera exploitée à la section 4.3.3 pour obtenir un champ 3D à partir de données expérimentales 2D temporelles.

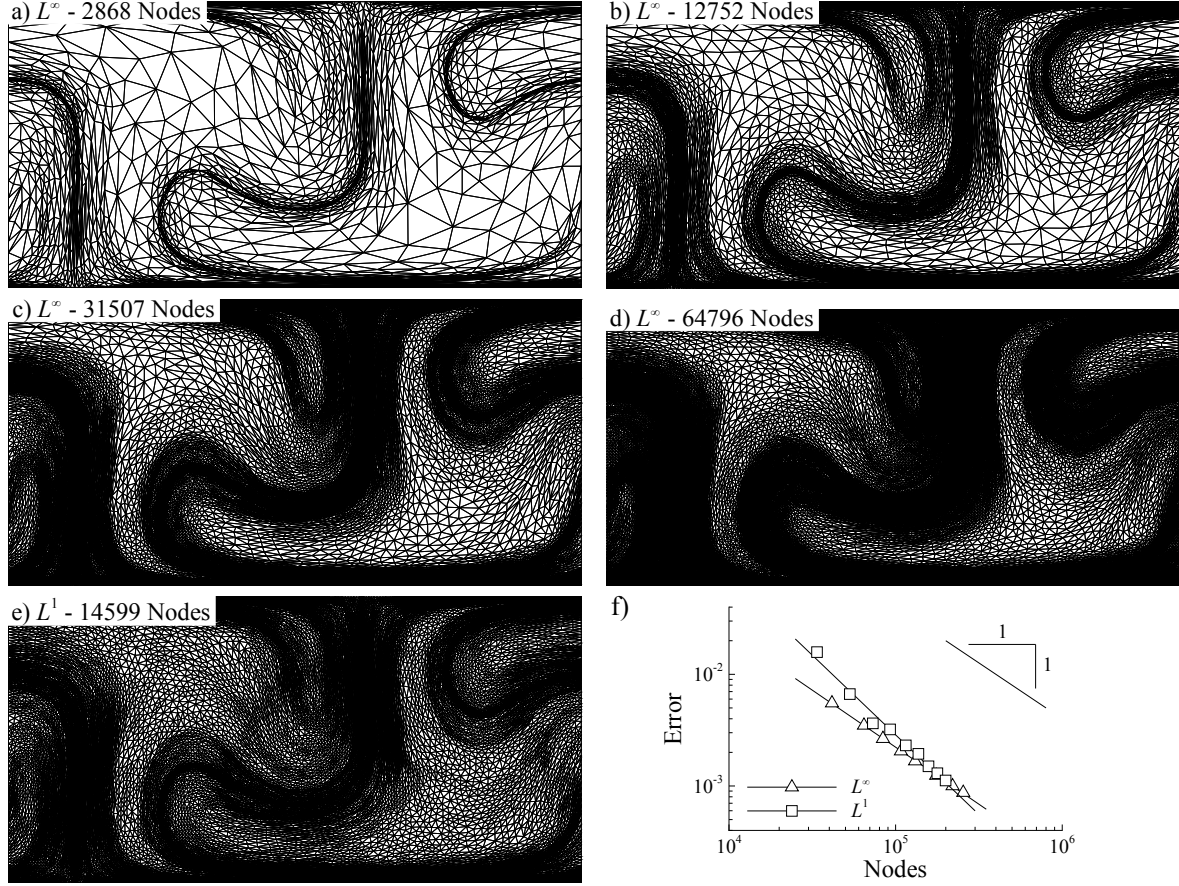


FIGURE 4.8 Analyse de convergence du maillage sur le champ de vitesse de Solomon et Gollub

Le domaine de calcul D est défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq 1) \ \& \ (-0.5 \leq y \leq 0.5)\} \quad (4.12)$$

avec $\Delta t = 0.01$ sec, $A = 1/2$, $u_c = 0.5$, et $\Lambda = 0.2$ couvrant ainsi une allée de 5 tourbillons. Le temps d'intégration ($\mathcal{T} = -0.6$ sec) a été sélectionné de façon à faire au mieux ressortir les contours des structures tourbillonnaires. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.9.

Dans les figures 4.9a-b, le maillage, composé de 9 465 nœuds, est adapté au champ $FTLE$ en norme L^∞ . Comme l'a montré l'exemple précédent, le maillage anisotrope adapté permet de mieux définir les crêtes du champ $FTLE$ (LCS). En règle générale, on

observe que les éléments couvrant les crêtes ont leur côté le plus long quasi-tangent à celles-ci afin de s'adapter à la variation locale du gradient du champ $FTLE$. Cela confirme, de manière empirique, l'efficacité de l'adaptation basée sur la matrice hessienne du champ de déplacement comme un substitut à l'adaptation directe sur le champ $FTLE$ lui-même. Le champ des vecteurs vitesses, obtenu dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de convection des tourbillons, a été superposé au champ $FTLE$ sur la figure 4.9a. On observe que ces vecteurs vitesse sont tangents aux LCS (en rouge), ce qui indique que le flux de masse traversant les LCS est très faible. Cela confirme qualitativement que les LCS , dans un horizon de temps \mathcal{T} , représentent des lignes matérielles comme l'a montré Shadden *et al.* (2005).

Un maillage de complexité équivalente à celui montré sur la figure 4.9b en norme L^∞ est montré sur la figure 4.9c en norme L^1 . Le résultat met en évidence la redistribution des nœuds dans le domaine de calcul lorsque l'adaptation est effectuée en norme L^1 . Cela réduit la précision des valeurs maximales du champ $FTLE$, et donc des LCS , au profit de structures plus petites. Enfin, le dernier encadré au coin inférieur droit (Fig. 4.9d) présente l'évolution de l'erreur d'interpolation du champ de déplacement en fonction de N_v . Les courbes de régression ont été tracées pour analyser la convergence du maillage avec les métriques en norme L^1 et L^∞ . Leurs pentes correspondent à une convergence quadratique dans l'espace (voir la remarque 5) puisque l'erreur de discrétisation dans le temps est négligeable, confirmant ainsi la théorie.

4.2.2 Champs tridimensionnels

L'écoulement en *œil de chat* a été utilisé pour valider les calculs des champs de déplacement et l'adaptation de maillage en trois dimensions. Le modèle d'écoulement 3D a été obtenu en extrudant le champ de vitesse 2D dans la troisième direction de l'espace (perpendiculaire au champ). Les données de vitesse dans les deux directions initiales sont ainsi conservées et la vitesse dans la troisième direction est mise à zéro. Cette situation est extrême puisque le hessien de chaque composante de la vitesse a au minimum une valeur propre nulle. Lors de la construction et l'intersection des métriques, cette valeur propre est alors limitée par $\epsilon = 10^{-5}$, pour rendre la métrique définie positive (Eq. 3.22). Un aperçu de la solution ainsi obtenue est présenté sur la figure 4.10b et peut être directement comparé à la solution 2D montrée sur la figure 4.10a. On pourra observer la similitude des deux maillages bien que les éléments soient très étirés dans la direction perpendiculaire au plan 2D dû à l'absence de gradient de vitesse, comme l'illustre la figure 4.10c. Cette

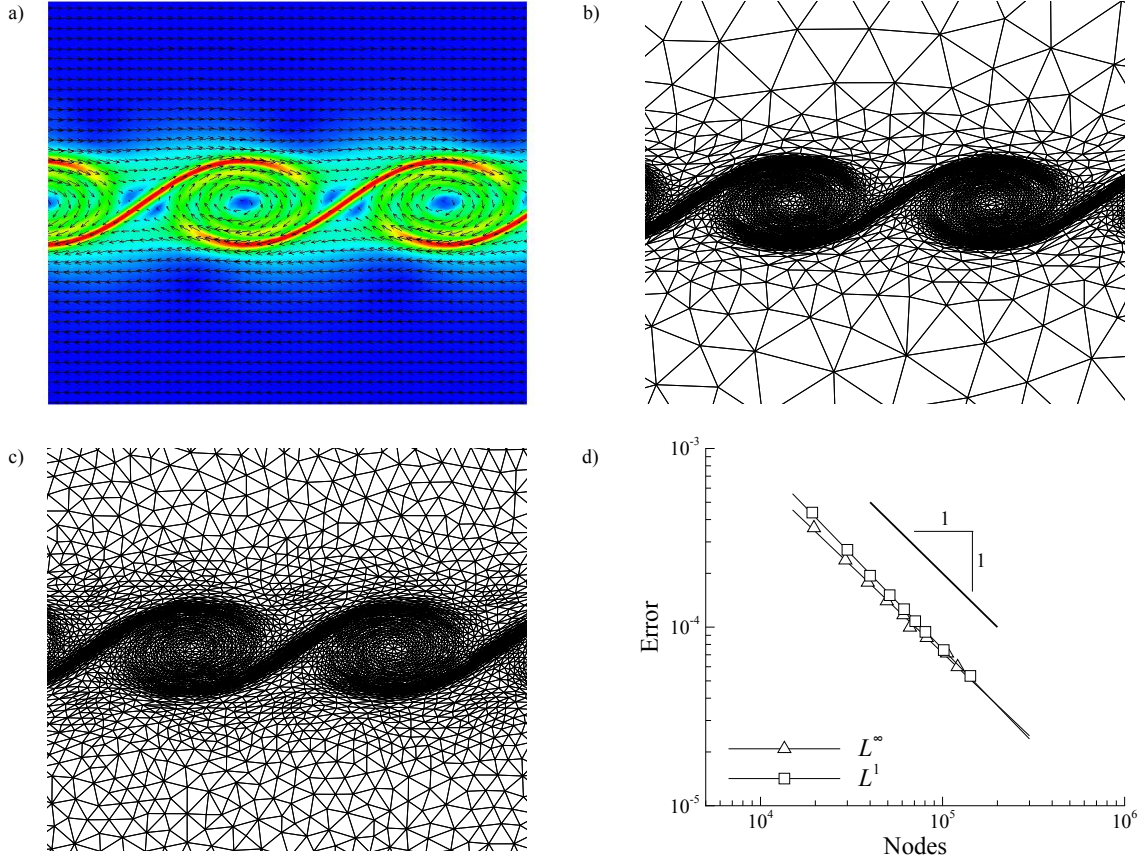


FIGURE 4.9 Écoulement en *œil de chat* : a) adaptation en norme L^∞ avec un maillage de 9 465 nœuds et 19 075 éléments, b) adaptation en norme L^∞ avec un maillage de 9 465 nœuds et 19 075 éléments, c) adaptation en norme L^1 avec un maillage de 9 771 nœuds et 19 471 éléments, d) estimation de l'erreur d'interpolation.

forte anisotropie est une conséquence directe de la construction des métriques. On pourra d'ailleurs remarquer que dans les régions hautes et basses de l'écoulement, où les vitesses sont constantes, le maillage devient isotrope dû à l'absence de direction d'étirement privilégiée. La figure 4.10d présente le taux de convergence de l'erreur d'interpolation. Les courbes de régression indiquent que la convergence est quadratique, comme le prédit l'équation 3.28 validant ainsi la théorie en dimension 3.

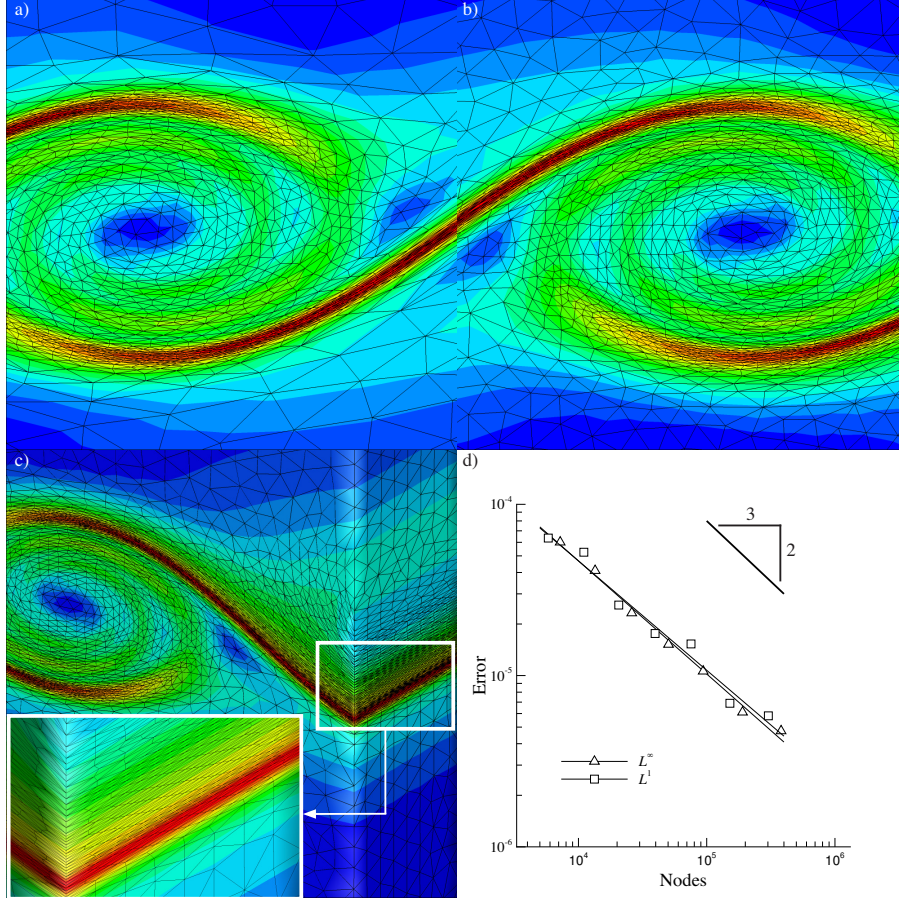


FIGURE 4.10 Maillage adapté pour l'écoulement en *œil de chat* en a) 2D et b), c) 3D (norme L^∞). Le cas 3D a été obtenu par une extrusion du champ de vitesse 2D, et l'erreur d'interpolation est illustrée en d).

4.3 Champs de vitesses expérimentaux

Cette dernière section montre des applications de notre méthodologie à des données expérimentales issues de mesures *PIV*. Cette technique, basée sur un traitement d'images de particules ensemencées dans un écoulement, est la seule fournissant des champs de vecteurs instantanés, ce qui la rend particulièrement adaptée à l'étude des écoulements instationnaires. Bien que la procédure pour le calcul du *FTLE* à partir de champs expérimentaux soit similaire à celle utilisée dans les paragraphes précédents, les données mesurées présentent des caractéristiques difficiles à reproduire à l'aide d'exemples analytiques. Par exemple, les solutions analytiques ne peuvent pas représenter des écoulements instationnaires complexes, tels que la dynamique tourbillonnaire et la turbulence,

où les fréquences temporelles et spatiales des fluctuations de vitesse varient sur plusieurs échelles. Par ailleurs, dans des situations concrètes, le champ de vitesse est limité au domaine de calcul D et les trajectoires des particules s'arrêtent brusquement lorsqu'elles atteignent les frontières, pouvant créer des artéfacts. Les paragraphes qui suivent vont traiter deux exemples en deux dimensions et un exemple en trois dimensions.

4.3.1 Jet impactant (2D)

Cet exemple est basé sur des mesures *PIV* résolues en temps d'un jet circulaire impactant sur une plaque plane. L'écoulement est laminaire (le nombre de Reynolds, basé sur le diamètre du jet et la vitesse de sortie, est $Re = 1260$) et le fluide est de l'eau. Les échelles spatiales et temporelles sont toutes complètement résolues. Le champ de vitesse est connu sur un domaine de mesure $U \subset \mathbb{R}^2$ et le domaine de calcul D est défini par :

$$D \equiv U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq x \leq 52 \text{ mm}) \ \& \ (0 \leq y \leq 17.2 \text{ mm})\}. \quad (4.13)$$

Les résultats, présentés sur les figures 4.12 et 4.13, ont été obtenus avec $\Delta t = 0.001$ s.

Pour détecter la formation de structures tourbillonnaires et analyser leurs évolutions spatio-temporelles, les champs *FTLE* sont calculés en intégrant les trajectoires à l'aide d'un temps d'intégration négatif. En effet, avec $\mathcal{T} < 0$, une valeur intense dans le champ *FTLE* indique une région de l'écoulement où les particules de fluide s'accumulent lorsque t grandit, détectant ainsi les centres des tourbillons. Le jet est centré horizontalement et pénètre par la limite inférieure de la fenêtre D , qui coïncide avec l'emplacement des lèvres de la buse, puis impacte sur la plaque placée à deux diamètres de la sortie du jet. Les limites du jet sont d'ailleurs clairement identifiées par des contours du champ *FTLE* sur la figure 4.12.

Le champ *FTLE*, représenté sur la figure 4.12a, a été obtenu avec la grille de mesure originale (cartésienne). Le temps d'intégration ($\mathcal{T} = -0,08$ s) a été choisi pour mieux révéler les structures de l'écoulement, c'est à dire la naissance d'anneaux tourbillonnaires en sortie de jet et leur comportement lorsqu'ils impactent sur la plaque. Alors qu'il est possible d'affiner les champs *FTLE* en utilisant des temps d'intégration plus longs, il en résulte généralement une dégradation des contours en raison du maillage initial grossier fourni par la technique *PIV*. En revanche, en utilisant des maillages adaptés, comme celui montré sur la figure 4.12b obtenu avec le même temps d'intégration, des détails plus fins sont révélés, en particulier la formation de tourbillons sur la plaque résultant de l'impact

des anneaux tourbillonnaires initialement formés dans le corps central du jet. Avec cette nouvelle grille, il est alors possible d’augmenter le temps d’intégration ($\mathcal{T} = -0,12$ s) afin de capturer encore plus de détails, comme illustré sur les figures 4.12c-d, pour la métrique en norme L^∞ , et les figures 4.12e-f, pour la métrique en norme L^1 .

Pour des valeurs plus élevées du temps d’intégration, les trajectoires des particules sont plus longues et donc un plus grand nombre de particules quittent le domaine de mesure. La plupart de ces particules proviennent cependant de la région inférieure du domaine qui correspond au cône potentiel du jet. Sans traiter les particules qui sortent du domaine, la solution converge, mais le taux de convergence est plus faible que le taux de convergence théorique, comme la figure 4.11 le montre. Il est cependant possible dans ce cas particulier de poursuivre l’intégration des trajectoires de ces particules perdues en étendant artificiellement le domaine de mesure. Pour cela, le profil de vitesse en entrée, qui se caractérise par une vitesse presque constante à l’intérieur du jet et une vitesse nulle en dehors, a été extrapolé pour les ordonnées en dessous du domaine de mesure. Cette méthode a permis d’obtenir une convergence quadratique dans l’espace (Fig. 4.13a), comme prédit par la théorie et ce sans créer d’artéfacts indésirables.

La figure 4.13b présente l’analyse de convergence obtenue sur une partie du domaine de mesure située dans le coin supérieur gauche où se concentrent plusieurs tourbillons près de la paroi. Dans ce sous-domaine, aucune particule ne quitte le domaine de mesure (U) et l’analyse de convergence est encore une fois quadratique. Ceci démontre que les traitements effectués sur le domaine de calcul complet sont adéquats puisque les structures sont toujours bien représentées et la convergence quadratique est toujours conservée.

Les maillages des figures 4.12c-e sont composés d’approximativement 20 000 nœuds, ce qui représente 10 % des nœuds nécessaires pour atteindre le même niveau de détail sur un maillage cartésien régulier. Ces résultats montrent que l’adaptation de maillage concentre les nœuds à proximité de la plaque impactée, où la dynamique tourbillonnaire est complexe, et au contraire, diminue le nombre de nœuds loin de la paroi où l’écoulement est plus constant. Au voisinage de la plaque, les deux métriques révèlent les structures tourbillonnaires avec pratiquement le même niveau de détails, cependant les maillages générés en norme L^∞ comportent moins de nœuds dans la région en amont que ceux générés en norme L^1 . Cela conduit à une plus faible résolution du champ *FTLE* au sein du fluide entraîné par le jet dans la figure 4.12d qu’à la figure 4.12f. Bien que l’analyse des écoulements instationnaires soit généralement axée sur la dynamique tourbillonnaire révélée par les *LCS*, certaines régions qui ne sont pas toujours définies par des crêtes

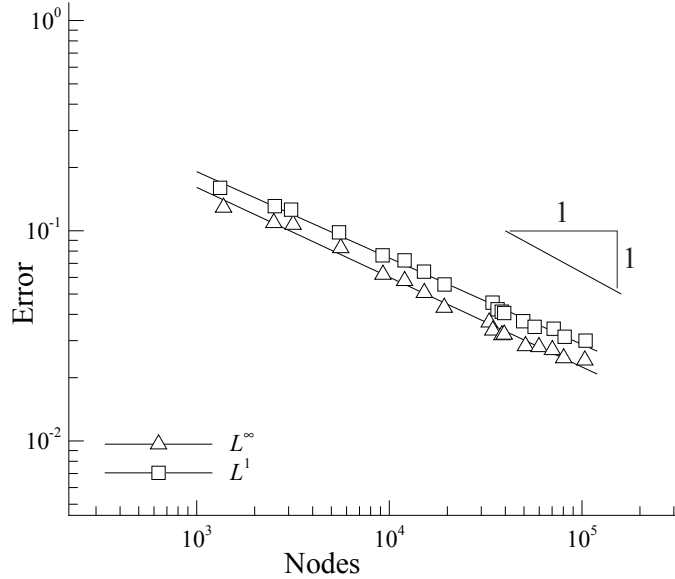


FIGURE 4.11 Analyse de convergence de maillage en norme L^∞ . Le domaine de calcul couvre le domaine de mesure en entier. Le champ de vitesse et les dérivées ne sont jamais extrapolées à l'extérieur du domaine de calcul. On remarque clairement le taux de convergence suboptimal obtenu causé par l'arrêt brusque du calcul des trajectoires aux frontières du domaine.

intenses du champ $FTLE$ pourrait néanmoins se révéler importantes, notamment en turbulence. Ceci est examiné dans la section suivante.

4.3.2 Transition vers la turbulence dans une restriction (2D)

Le deuxième exemple expérimental est un écoulement généré au travers d'une restriction locale dans un conduit axisymétrique (voir la géométrie sur la figure 4.14). Dans le divergent de la restriction, la décélération de l'écoulement engendre un gradient de pression adverse qui provoque un décollement à la paroi, ce qui entraîne en aval le développement d'un jet laminaire entouré par une région de recirculation axisymétrique (voir Vétel *et al.*, 2010, pour plus de détails). La figure 4.15 montre le champ $FTLE$ calculé à partir de données recueillies dans deux plans méridiens différents. Le premier est situé juste en aval de la restriction (Fig. 4.15a-b) et le second plan un peu plus en aval de l'écoulement

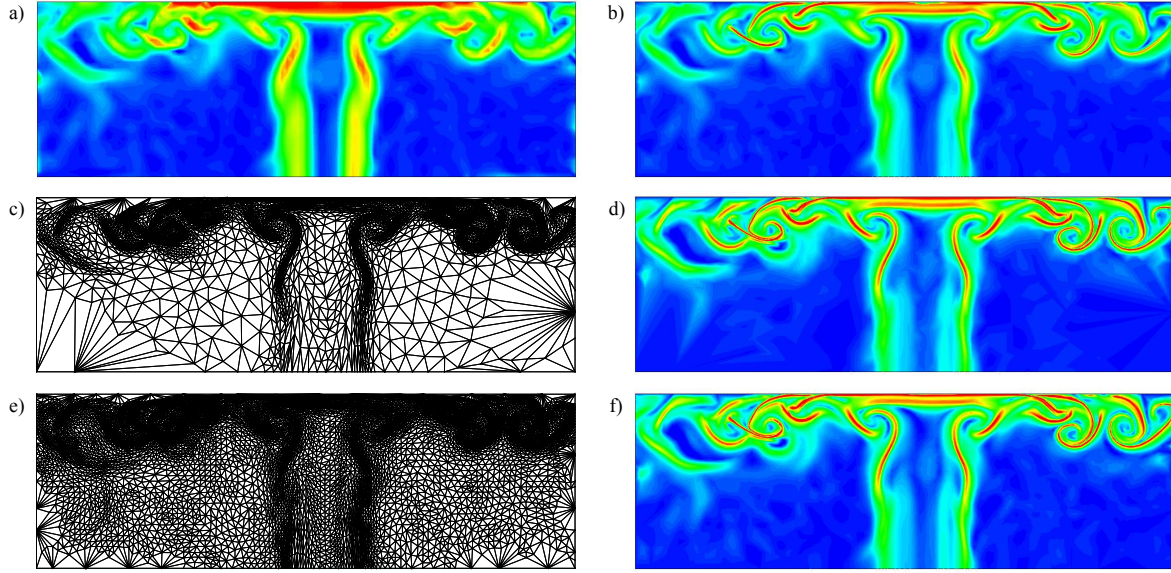


FIGURE 4.12 Champs $FTLE$ calculé avec les mesures de vitesse d'un jet impactant circulaire (l'écoulement va du bas vers le haut). Les résultats obtenus avec la grille de PIV initiale en a) et avec un maillage adapté en b) ont été calculés avec un temps d'intégration \mathcal{T} qui correspond au 2/3 de celui utilisé pour obtenir les résultats en norme L^∞ et L^1 montrés en c)-d) et e)-f), respectivement.

(Fig. 4.15c). Le domaine de mesure couvre un diamètre de haut et trois diamètres de long.

Le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse moyenne dans une section et le diamètre de celle-ci, est $Re = 1160$. Sur la figure 4.15a, la présence d'une couche de cisaillement axisymétrique est révélée, dans la région amont du domaine de mesure, par des contours du champ $FTLE$ concentrés sur deux lignes horizontales. Celles-ci marquent donc les limites du jet se formant à la sortie de l'étranglement, comme ce fut le cas avec le jet impactant (cf. Fig. 4.12). Ici, le cône potentiel est plus long et s'étend jusqu'à la limite aval du domaine de mesure. Par conséquent, un grand nombre de particules sont perdues pendant le calcul des trajectoires, ce qui explique la région sombre du champ $FTLE$ au voisinage de l'axe du conduit. Cependant, l'instabilité de la couche de cisaillement est tout de même clairement observée par la formation et le développement d'anneaux tourbillonnaires se déformant peu à peu en aval en raison de l'apparition la turbulence. Ainsi, la perte de particules ne représente pas, en général, une contrainte trop sévère, du moins pour les écoulements tourbillonnaires. En effet, le temps d'intégration \mathcal{T} est

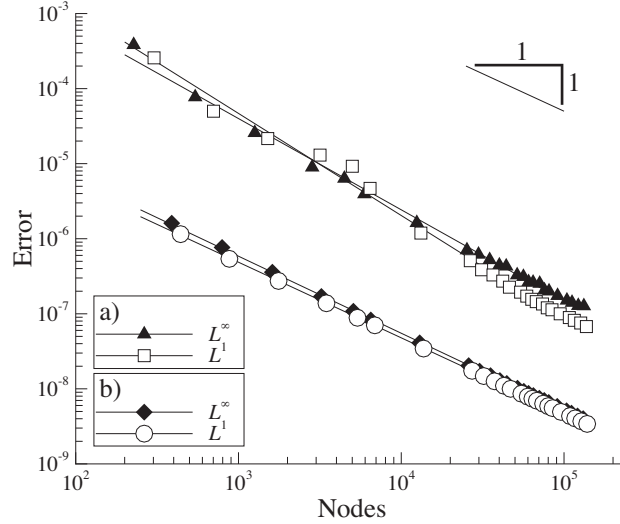


FIGURE 4.13 Analyse de convergence de maillage en norme L^1 et L^∞ : a) Le domaine de calcul couvre le domaine de mesure en entier. Le champ de vitesse et les dérivées sont extrapolées, lorsque nécessaire, à l'extérieur du domaine de calcul afin d'obtenir un champ de déplacement régulier ; b) le domaine de calcul est une sous-partie du domaine de mesure. Lors du calcul des déplacements, les particules restent à l'intérieur du domaine de mesure et aucune extrapolation du champ de vitesse est nécessaire.

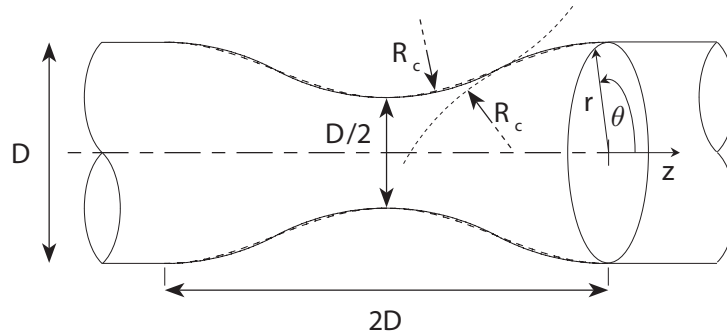


FIGURE 4.14 Géométrie de la restriction. L'écoulement va de la gauche vers la droite.

sélectionné afin de correspondre à une échelle de temps caractéristique des instationnarités de l'écoulement, comme par exemple le temps de retournement d'un tourbillon. Si une particule quitte le domaine, c'est généralement parce qu'elle n'a pas franchi une région de mélange intense et est donc moins importante dans l'analyse de écoulement. Par exemple, la figure 4.15b montre un champ *FTLE* obtenu au même endroit qu'à la figure 4.15a, mais pour un autre instant initial t_0 . La symétrie de l'écoulement est brisée, ce qui

déclenche une transition plus rapide vers la turbulence que précédemment. La première structure apparaissant dans la partie inférieure du domaine de mesure, à environ un diamètre en aval de la restriction, est clairement mise en évidence alors que cette même région apparaît plus diffuse dans la figure 4.15a montrant une activité tourbillonnaire moins intense. Dans ce dernier exemple, le développement asymétrique de l'écoulement entraîne la formation de plus grands tourbillons, diminuant ainsi la longueur du cône potentiel et par conséquent celle de la région où les particules sont perdues lors du calcul du champ *FTLE*. Cette région est particulièrement restreinte dans les résultats montrés sur la figure 4.15c, où le champ *FTLE* a été calculé avec des champs de vitesse mesurés en aval de la transition. Les résultats reflètent l'intensité du mélange généré par la turbulence dans cette région. Avec des trajectoires plus complexes, le temps de présence des particules à l'intérieur du domaine de mesure est plus long que dans les exemples des figures 4.15a-b, et moins de particules sont perdues. Cependant, alors que la procédure utilisée dans la section précédente pour extrapoler le champ de vitesse à l'extérieur du domaine de mesure peut être utilisé en amont où l'écoulement est stable (Figs. 4.15a-b), elle ne peut pas être utilisée dans les écoulements instables et turbulents (Fig. 4.15c).

Un exemple d'artéfact qui peut apparaître dans le champ *FTLE* à t_0 est une ligne qui rassemble l'ensemble des points du domaine qui se trouveront (où se trouvaient) sur une frontière du domaine à $t_0 + \mathcal{T}$. La discontinuité introduite à la frontière induit alors de forts gradients dans le champ de déplacement. L'impact de cet artéfact peut être compris par la simple analyse d'un écoulement 1D de vitesse constante $u > 0$ dans un domaine $D = [0, L]$. Nous divisons arbitrairement ce domaine en deux en sélectionnant $A \in D$ et $T = (L - A)/u > 0$. Ainsi, si les particules sont dans $[0, A]$ à t_0 , leurs positions finales seront dans le domaine de mesure à $t_0 + \mathcal{T}$. Par contre si elles sont dans $]A, L]$, le calcul des trajectoires s'arrête brusquement en $x = L$. Dans ces conditions, la solution de l'équation (3.1) est donnée par la relation suivante :

$$\varphi = \begin{cases} x + L - A & x \in [0, A] \\ L & x \in]A, L]. \end{cases} \quad (4.14)$$

La solution est de classe $C^0(D)$, et ne respecte pas le niveau minimum global de continuité nécessaire à l'adaptation de maillage et aux procédures d'estimation d'erreur. Néanmoins, les structures révélées par le processus d'adaptation dans $[0, A[$ seront physiquement significatives, puisque le champ de déplacement local possède un niveau de continuité suffisant. Dans la région $]A, L]$, les valeurs du *FTLE* sont sous-estimées, et à

l'interface entre ces deux régions ($x = A$), le champ $FTLE$ est discontinu. Dans ce cas, l'adaptation du maillage et l'augmentation du nombre des nœuds n'entraînent pas une réduction de l'erreur d'interpolation comme démontré à la section 3.4, ce qui peut être utilisé comme un indicateur de certaines zones critiques de l'écoulement.

Dans le but d'évaluer l'impact d'un domaine de mesure fini sur le champ $FTLE$ dans un cas réel, nous avons effectué un calcul en utilisant uniquement les données se trouvant dans le cadre blanc montré à la figure 4.15c. Aucun artéfact significatif n'a été décelé, même si l'intensité du champ $FTLE$ est plus faible dans la région gauche du sous-domaine qu'elle ne l'est en incluant toutes les données. En régime turbulent les trajectoires sont en effet beaucoup plus complexes qu'en régime laminaire, les structures sont alors révélées pour des temps d'intégration plus courts, ce qui limite l'apparition d'artéfacts.

Nous avons testé une méthode similaire à la technique d'extrapolation des champs de vitesse proposée par Tang *et al.* (2010b), qui utilisent une fonction de transition pour relier les champs de vitesse mesurés à une vitesse moyenne constante à l'extérieur du domaine de mesure, pour permettre aux particules de se déplacer librement en dehors du domaine de calcul. Même si une légère amélioration a été observée sur certaines structures, ces changements ont été jugés négligeables. Jusqu'ici, à notre connaissance, il n'existe aucune technique qui garantit un champ de déplacement de classe $C^2(D)$ dans le domaine de calcul D . La technique doit être adaptée à chaque écoulement, pour obtenir un champ $FTLE$ indépendant du maillage. Dans notre cas, l'erreur indiquée sur la figure 4.15d a été calculée uniquement à partir des données se trouvant dans le cadre blanc de la figure 4.15c, et présente le taux de convergence désiré.

La figure 4.16 montre des résultats obtenus à partir du même domaine de mesure que celui de la figure 4.15c, mais pour un autre instant. Ce deuxième exemple est présenté parce que certaines régions du champ $FTLE$ sont moins intenses que dans le premier exemple, ce qui est engendré par l'intermittence de l'écoulement. Bien que la transition vers la turbulence se produise en aval de la restriction, le faible nombre de Reynolds atteint ($Re = 1160$) est inférieur au nombre de Reynolds critique des écoulements en conduite ($Re_c \sim 2300$), si bien que l'écoulement redevient laminaire plus loin en aval. Le $FTLE$ dans la moitié droite de la figure 4.16a montre les prémices de cet état. Le profil de vitesse instantanée dans cette région peut être décomposé en un écoulement moyen uniforme, correspondant au profil de vitesse plat turbulent, et une composante fluctuante de faible amplitude (l'intensité de la turbulence est faible dans cette région). Les particules de fluide sont donc convectées quasiment à la même vitesse, et par conséquent le champ

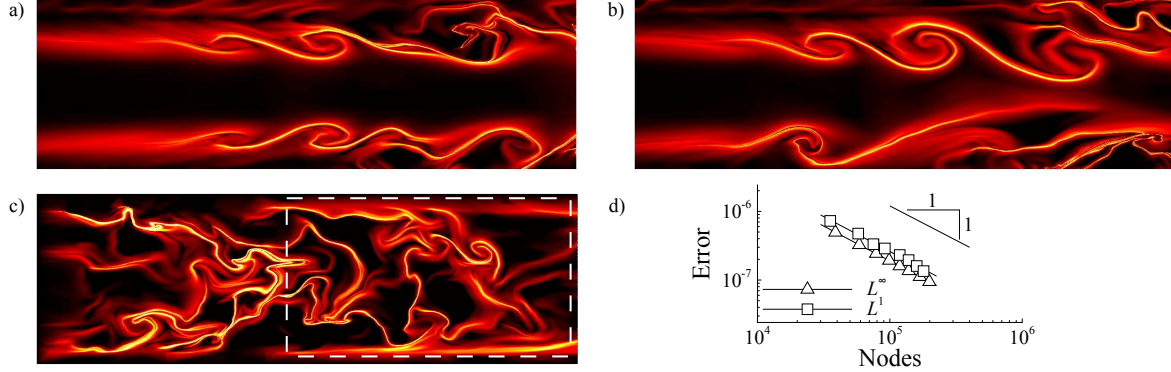


FIGURE 4.15 Champs $FTLE$ calculés dans un plan méridien en aval d’une restriction à l’intérieur d’un conduit. a) et b) sont situés immédiatement derrière la restriction tandis que c) est situé trois diamètres plus loin (les champs de vitesses n’ont pas été mesurés simultanément et l’écoulement circule de gauche à droite). L’erreur montrée en d) est calculée avec les données situées à l’intérieur du cadre blanc en c)

de déplacement est relativement faible, ce qui se traduit par un champ $FTLE$ assez diffus. Au contraire, dans la moitié gauche de la figure 4.16a, les tourbillons sont très déformés par un cisaillement intense (l’intensité de la turbulence est élevée). Cependant, le champ $FTLE$ dans la région de droite fournit des caractéristiques similaires à celles des visualisations obtenues par injection de colorant ou de fumée dans les écoulements expérimentaux, et devrait donc être adéquatement résolu pour être utilisé à des fins d’analyse. Il pourrait être possible de révéler plus de détails en augmentant simplement le temps d’intégration \mathcal{T} , cependant la plupart des particules atteignent leurs positions finales à l’extérieur du domaine de mesure. Des structures similaires peuvent être vue dans Green *et al.* (2007), où le $FTLE$ a été calculé à partir de vitesses obtenues par simulation numérique directe de l’équation de Navier-Stokes dans une couche limite turbulente, et apparaissent également dans la région de recirculation qui se développe en aval de la restriction illustrée dans le haut de la figure 4.15a (l’empreinte visuelle est d’ailleurs très similaire aux visualisations expérimentales).

Les champs $FTLE$ montrés sur la figure 4.16 révèlent que le niveau de détail obtenu dans certaines structures de l’écoulement dépend de la norme choisie. Alors que les deux normes sont en mesure de capturer les LCS dans la partie gauche de l’écoulement, il est clair que la densité de nœuds obtenue avec les métriques en norme L^1 permet une meilleure visualisation des structures définies par les valeurs $FTLE$ plus faibles. Cela

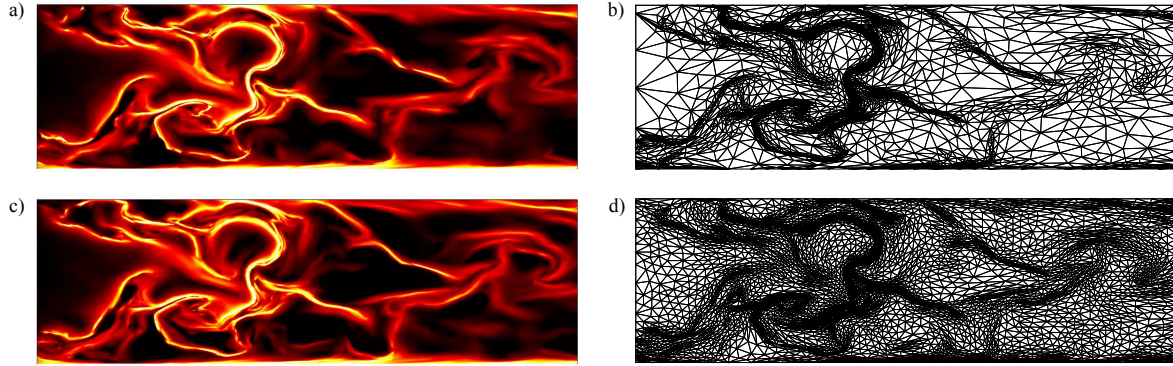


FIGURE 4.16 Champs $FTLE$ calculés à une distance de 3 diamètres de la restriction avec leurs maillages. a) et b) sont obtenus en utilisant la norme L^∞ et c) et d) avec la norme L^1 .

indique que, dans un écoulement turbulent, le norme L^1 peut révéler plus d'information que la norme L^∞ qui en revanche semble être mieux adaptée aux écoulements laminaires et à l'extraction des surfaces de séparation et de recollement.

4.3.3 Écoulement dans une valve cardiaque artificielle (3D)

Le calcul des trajectoires 3D à partir de données expérimentales a longtemps été restreint par les limites technologiques des techniques de mesure qui fournissent la plupart du temps des composantes de vitesse dans un plan. Avec le développement récent de la *PIV* tomographique, qui fournit les trois composantes des vecteurs vitesse résolues en temps et en espace, le calcul des champs $FTLE$ 3D est envisageable. Cela nécessite cependant un nombre de nœuds d'un ordre de grandeur plus élevé que dans les cas 2D et naturellement, des ressources informatiques plus importantes. En conséquence, l'adaptation de maillage apparaît comme une technique utile et même nécessaire dans certains cas afin de faciliter les étapes de post-traitement et de visualisation.

À notre connaissance, le calcul de champs $FTLE$ n'a pas été appliqué aux écoulements expérimentaux 3D. À ce jour, seuls les domaines de calcul 2D sont utilisés, ce qui permet d'obtenir un champ $FTLE$ exact pour des écoulement 2D ou une approximation pour des écoulements 3D puisque le mouvement des particules dans la direction hors-plan n'est pas pris en compte. Ceci vient de la difficulté à mesurer des champs de vitesse instantanés en 3D et de la nécessité d'en faire l'acquisition à des fréquences suffisamment élevées.

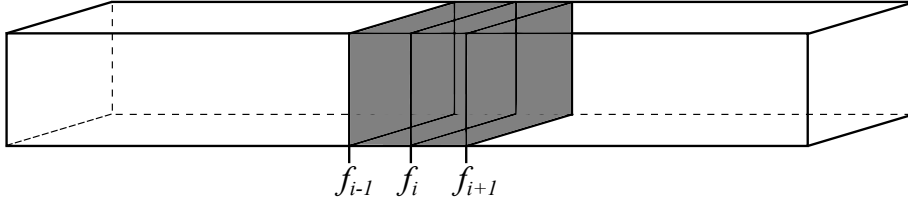
Ces limites ont été contournées dans ce dernier exemple expérimental en utilisant une technique de reconstruction 3D sur l'écoulement périodique qui résulte de l'ouverture d'une valve cardiaque artificielle (la géométrie de la valve est montrée sur la figure 4.18). Pour chaque pulsation de l'écoulement, les feuillets de la valve s'ouvrent et se referment. Une fois les feuillets ouverts, le débit peut être considéré comme quasi-constant pendant une certaine durée. La technique de *PIV* stéréoscopique (Raffel *et al.*, 2007) a été utilisée pour mesurer les trois composantes des vecteurs vitesse dans un plan perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement, situé à une distance de six diamètres en aval de la valve. L'historique en temps de l'écoulement dans ce plan a alors été utilisé pour reconstruire les données dans un volume extrudé dans la direction normale à ce plan en invoquant l'hypothèse de Taylor. Pour cela, on suppose que les grosses structures tourbillonnaires de l'écoulement se déforment très peu pendant le temps d'observation. En figeant la géométrie des tourbillons, les champs de vitesse mesurés dans un plan de référence fixe z_0 peuvent être interprétés comme ceux générés par un champ 3D qui se convecte à la vitesse de convection u_c des structures. Les vecteurs vitesse peuvent donc être obtenus en tout point de l'espace à un temps t_0 donné par analogie avec la propagation des ondes planes :

$$\mathbf{u}(z_0, t) = \mathbf{u}(z_0 - u_c(t - t_0), t_0), \quad (4.15)$$

comme l'illustre schématiquement la figure 4.17. Ainsi, les trois composantes de la vitesse et leurs dérivées spatiales dans un volume peuvent être déduites (notons que la dérivée spatiale dans la direction hors-plan z est estimée à partir de la dérivée en temps avec $\partial_z = -u_c^{-1}\partial_t$).

Nos résultats sont présentés sur la figure 4.18. Le domaine de mesure généré par l'utilisation de l'hypothèse de Taylor est un cylindre centré sur l'axe de la valve et l'analyse de l'écoulement est obtenu à partir de coupes 2D du champ *FTLE* 3D. La coupe dans le plan perpendiculaire aux feuillets est montrée sur la figure 4.18a. Le champ *FTLE* révèle un sillage en aval de chaque feuillet, et en particulier, celui de la partie supérieure du domaine évoque fortement les visualisations des allées de tourbillons de von Kármán se développant derrière un cylindre ou une plaque plane inclinée (voir Van Dyke, 1982, pp. 56-57). Le niveau de détail est assez remarquable et donne une impression visuelle de l'écoulement supérieure à tout autre critère eulérien utilisé pour extraire les structures tourbillonnaires. Le maillage associé montre que les nœuds sont principalement situés sur les *LCS*, et fournit le squelette des structures tourbillonnaires. Bien que les observations

a)



b)

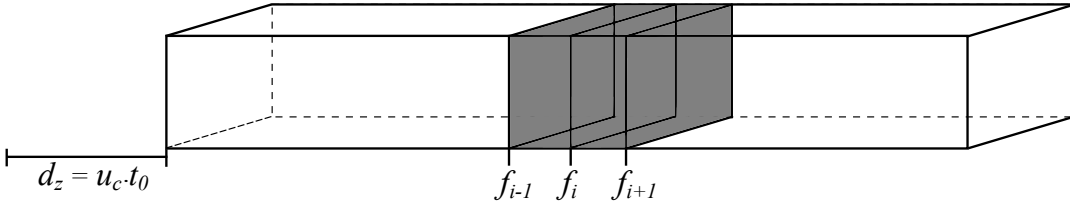


FIGURE 4.17 Les champs de vitesse 2D mesurés temporellement sont positionnés les uns à la suite des autres ($\dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots$) ce qui nous permet de reconstruire le volume de l'écoulement à $t = 0$. En b), à un temps t_0 , le domaine se déplace dans la direction z à la vitesse de convection u_c .

à partir de cette coupe 2D semblent montrer un écoulement bien organisé, les résultats obtenus dans le plan méridien perpendiculaire montré sur la figure 4.18b révèlent que de fortes perturbations se développent dans le jet se formant entre les deux feuillets. Ceci s'illustre notamment par la forte densité des nœuds dans ce plan.

La densité du maillage requis pour analyser l'écoulement perturbé est beaucoup plus importante que celle nécessaire en périphérie des feuillets. Cet exemple illustre à nouveau l'avantage d'utiliser l'adaptation de maillage dans les écoulements où des régions laminaires coexistent avec des régions turbulentes. Ces écoulements sont caractérisés par des zones où les échelles de vitesse sont séparées par plusieurs ordres de grandeur. Ceci inclut la plupart des écoulements étudiés en recherche ou utilisés lors d'applications industrielles, comme les couches de cisaillement, les jets, les sillages, etc.

Afin de donner une idée des avantages d'utiliser l'adaptation de maillage, la figure 4.18c montre les résultats obtenus en utilisant une grille cartésienne. La grille initiale a été affinée jusqu'à ce que la qualité du résultat se compare à celui obtenu avec l'adaptation de maillage. Bien que le niveau de détail ne soit pas aussi élevé que dans les figures 4.18a et b (en particulier la netteté des structures tourbillonnaires), la grille cartésienne comporte 34 millions de nœuds, comparativement à 1,7 millions pour le maillage anisotrope, ce

qui donne un rapport de 20/1. La taille du fichier de données (ASCII) de ces résultats est de 400 Mo pour le maillage adapté et de 2,3 Go pour le maillage uniforme. Le gain obtenu pour le stockage de la solution est cependant plus faible que le gain obtenu par la réduction du nombre de nœuds puisque la connectivité des maillages cartésiens isotropes est implicite et donc n'a pas à être stockée.

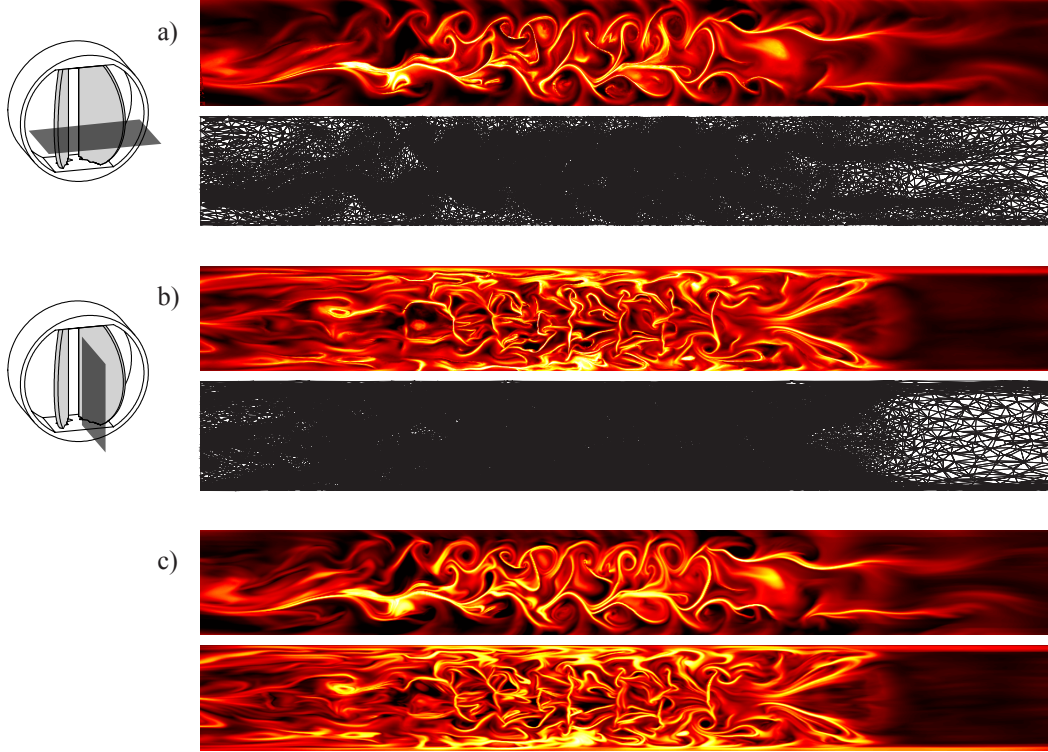


FIGURE 4.18 Champ *FTLE* 3D calculé en aval d'une valve cardiaque artificielle utilisant l'adaptation de maillage. Les coupes 2D correspondent aux plans indiqués dans la géométrie de la valve à gauche. Les contours du *FTLE* et les maillages sont montrés en a) pour le plan perpendiculaire et en b) pour le plan parallèle aux feuillets de la valve. Les résultats obtenus sans adaptation de maillage sont présentés en c) à des fins de comparaison. La métrique en norme L^∞ a été utilisée pour l'adaptation de maillage.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Synthèse des travaux

L'identification des structures d'écoulement à l'aide de l'exposant de Lyapunov en temps fini (*FTLE*) a été revu afin d'améliorer la précision en adaptant les nœuds de la grille de calcul. La méthodologie, basée sur un ensemble de 12 équations différentielles en 2D et de 30 équations différentielles en 3D, permet l'obtention du champ de déplacement et de ses dérivées premières et secondes. Simultanément, il fournit une estimation de l'erreur d'interpolation qui quantifie la qualité du champ *FTLE* obtenu. Ceci mène à une meilleure précision nodale des composantes du tenseur de Cauchy-Green et de ses valeurs propres. Avec la matrice hessienne du champ de déplacement, nous définissons, en 3D, trois métriques que nous intersectons en une seule métrique multi-échelles, continue et optimale. Cette métrique est fournie à un logiciel d'adaptation de maillage anisotrope de façon à révéler itérativement les structures de l'écoulement en se basant sur la norme L^p appropriée.

L'efficacité de la méthode est illustrée par plusieurs exemples. Les résultats obtenus à partir de solutions analytiques montrent que le cadre actuel de l'adaptation de maillage anisotrope est bien adapté au calcul des champs *FTLE*. Cela est de plus confirmé par des calculs à l'aide de données expérimentales, où les écoulements laminaires et turbulents sont particulièrement bien détaillés et pour lesquels l'estimation de l'erreur d'interpolation converge de façon quadratique, comme prévu théoriquement. Bien que l'utilisation de la métrique en norme L^∞ souligne les structures lagrangiennes cohérentes des écoulements laminaires tout en minimisant le nombre de nœuds, des structures moins bien définies sont mieux révélées par l'utilisation de la métrique en norme L^1 pour les écoulements turbulents. En pratique, les deux normes convergent vers les mêmes résultats lorsque le nombre de nœuds est suffisamment élevé. En général, ce nombre de nœuds est d'au moins un ordre de grandeur inférieur à celui requis pour obtenir une solution équivalente avec un maillage régulier.

5.2 Limitations de la solution proposée

Comme expliqué sur un exemple à la section 4.3.2, un phénomène numérique est engendré par la sortie de particules du domaine de calcul. Plus précisément, des artéfacts numériques apparaissent sous forme de courbes en 2D et de surfaces en 3D qui délimitent deux régions : dans la première, les particules demeurent à l'intérieur du domaine de calcul et dans la deuxième, elles en sortent. Nous avons remarqué que ce bruit peut perturber la convergence de notre méthode d'adaptation de sorte que l'erreur demeure la même malgré l'ajout de nœuds sur la grille de calcul. Il est donc nécessaire de traiter ces particules afin de minimiser les impacts sur la solution globale. Jusqu'à présent, à notre connaissance, il n'existe pas de solution valable applicable à tous les écoulements, cependant plusieurs méthodes permettent d'améliorer les résultats comme :

- Symétriser le champ par rapport à la frontière afin de ramener les particules à l'intérieur du domaine. Cette technique revient en fait à imposer une condition de glissement à la paroi ;
- Ajouter une vitesse nulle à l'extérieur du domaine de calcul afin de stopper les particules et de terminer l'intégration numérique ;
- Poursuivre le calcul des trajectoires à l'extérieur du domaine de calcul lorsque le profil de vitesse à l'entrée ou à la sortie est connu ;
- Utiliser la position de la paroi comme position finale de la particule au lieu de simplement arrêter le calcul au dernier point se trouvant dans le domaine. Des trajectoires de particules quittant le domaine sont par exemple présentées sur la figure 5.1. Les particules 1 et 2 sont initialement très proches mais leurs positions finales avant de quitter le domaine sont relativement éloignées. Cette situation non physique engendre alors des artéfacts numériques. Bien qu'il soit facile de modifier la position finale d'une particule lorsque le tenseur de Cauchy-Green est calculé à l'aide d'une méthode classique comme celle présentée par Shadden *et al.* (2005), notre méthode, qui calcule simultanément les dérivées premières et secondes durant le calcul des trajectoires, nécessite d'interpoler ces dérivées à la paroi ;
- Ajouter un champ moyen à l'extérieur du domaine de calcul et relier les champs interne et externe à l'aide de splines pour faciliter la transition (Tang *et al.*, 2010a).

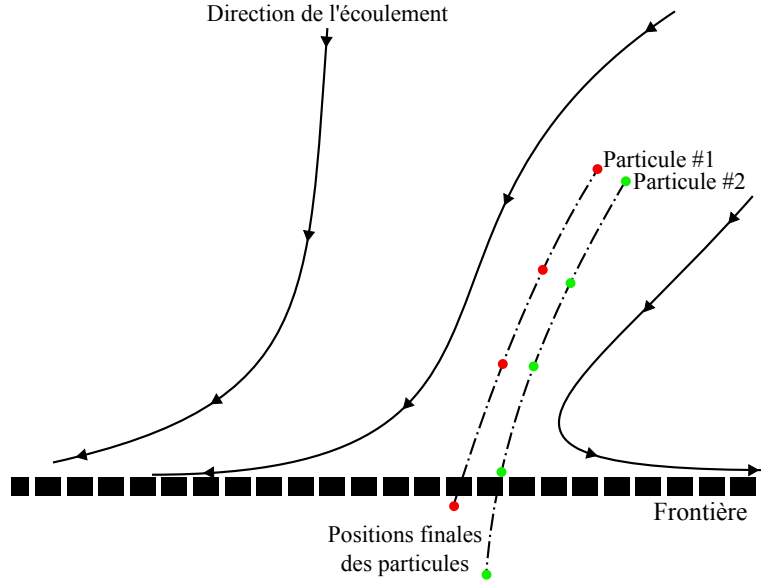


FIGURE 5.1 Visualisation de la sortie de particules. On peut comprendre qu'en conservant simplement les dernières positions à l'intérieur du domaine comme positions finales lors du calcul des trajectoires, deux particules qui devraient avoir des trajectoires similaires peuvent être éloignées après l'intégration numérique.

Toutes ces solutions modifient la physique des écoulements et entraînent la formation de structures lagrangiennes « fictives ». Quelle que soit la méthode utilisée, il est important de connaître ses effets et d'en tenir compte lors de l'analyse de la physique de l'écoulement.

Une contrainte du programme réalisé est qu'il utilise un mailleur commercial comme une *boîte noire*. Nous avons rencontré plusieurs problèmes lorsque certains éléments du maillage devenaient très étirés (avec un rapport d'anisotropie de plus de $1/1\,000\,000$). Cette situation se produit plus fréquemment lorsque le temps d'intégration \mathcal{T} est élevé et pour des écoulements turbulents tridimensionnel complexes, donc lorsque les structures lagrangiennes sont minces et les gradients très importants. La technique qu'il faudrait favoriser lorsque l'on veut calculer un champ *FTLE* pour un long temps d'intégration est d'effectuer plusieurs itérations et d'augmenter graduellement le temps d'intégration. Une méthode semblable est utilisée pour la résolution numériques de équation de Navier-Stokes, en augmentant graduellement le nombre de Reynolds. De cette manière, il est possible de converger vers la solution sans imposer de grands changements topologiques brusques à l'intérieur du maillage, ce qui semble induire des erreurs (ou simplement

l'arrêt) du logiciel d'adaptation.

5.3 Améliorations futures

La méthodologie que nous avons décrite dans ce document est actuellement limitée à l'interpolation linéaire du champ *FTLE* et est combinée à l'adaptation de maillage anisotrope basée sur la matrice hessienne. Cependant, la qualité de la représentation du champ *FTLE* pourrait être améliorée en utilisant une approximation polynomiale d'ordre supérieur, et ceci est certainement une voie à explorer pour réduire le nombre de nœuds au voisinage des *LCS*. En théorie, il devrait n'y avoir aucune incidence sur le calcul du champ de déplacement et de son gradient, ce qui devrait améliorer la qualité du champ *FTLE*. Cependant, la généralisation de notre approche pour des polynômes d'ordre P^k nécessiterait l'ajout d'une quantité excessive d'équations différentielles couplées. Cela suggère la nécessité d'élaborer un cadre d'adaptation anisotrope de maillage différent, comme indiqué par les avancées récentes dans ce domaine de recherche.

De plus, la rapidité du calcul et l'efficacité de la méthode pourraient être améliorées. Malgré l'implémentation du calcul parallèle, lorsque le calcul est effectué pour plusieurs pas de temps (afin de suivre l'évolution des *LCS*) et pour différents temps d'intégration \mathcal{T} , le temps de calcul peut devenir très important. Il est intéressant de noter les travaux récents de Brunton et Rowley (2010) qui permettent d'améliorer l'efficacité de la méthode de calcul en évitant de recalculer à chaque instant les portions de trajectoires déjà calculées aux instants précédents. Sur la figure 5.2, la partie redondante des trajectoires est encadrée en rouge et la partie nécessaire au calcul pour l'instant en cours est encadrée en bleu. Dans le cas où l'on souhaite suivre l'évolution temporelle des structures de l'écoulement et générer des animations, cette méthodologie permet d'économiser un temps de calcul important. La méthode permet aussi d'obtenir une approximation du champ de déplacement dans les régions de peu d'intérêt. Pour cela, seulement une fraction des trajectoires des particules du domaine est calculée ce qui permet d'encore diminuer le temps de calcul d'un ordre de grandeur (ce gain varie en fonction de l'écoulement).

Finalement, nous travaillons actuellement sur l'extraction de surfaces de décollement et de recollement que l'exposant de Lyapunov permet de révéler contrairement aux critères eulériens. La mesure et l'analyse de ces phénomènes sont cruciaux car ils permettront de répondre à de nombreux problèmes industriels qui ne peuvent pour l'instant être prédits numériquement (véhicules aériens, marins et terrestres, génération d'énergie,

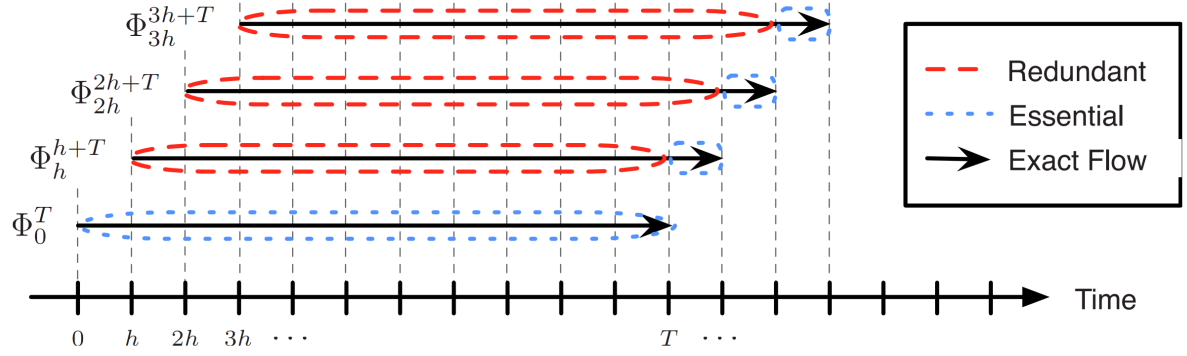


FIGURE 5.2 Illustration montrant les trajectoires redondantes lors d'un calcul de champ *FTLE* pour plusieurs temps initiaux afin de suivre l'évolution temporelle des structures (image tirée de Brunton et Rowley, 2010)

etc.).

Bibliographie

AKIN, J. (2005). *Finite Element Analysis with error estimators*. Elsevier, première édition.

ALAUZET, F. (2010). Size gradation control of anisotropic meshes. *Finite Elem. Anal. Design*, 181–202.

ALAUZET, F., LOSEILLE, A., DERVIEUX, A. et FREY, P. (2006). Multi-dimensional continuous metric for mesh adaptation. Springer, éditeur, *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*. 191–214.

ALMEIDA, R., FEIJÓO, R., GALEÃO, A., PADRA, C. et SILVA, R. (1998). Adaptive finite element computational fluid dynamics using an anisotropic error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 182, 379–400.

BABUŠKA, I. et AZIZ, A. (1976). On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13, 214–226.

BÉLANGER, S. (2010). *Adaptation de maillage anisotrope*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

BOROUCHAKI, H., GEORGE, P. et MOHAMMADI, B. (1997a). Delaunay mesh generation governed by metric specifications part ii. applications. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25, 85–109.

BOROUCHAKI, H., GEORGE, P. L., HECHT, F., LAUG, P. et SALTEL, E. (1997b). Delaunay mesh generation governed by metric specifications. part i. algorithms. *Finite elements in analysis and design*, 25, 61–83.

BOURGAULT, Y., PICASSO, M., ALAUZET, F. et LOSEILLE, A. (2009). On the use of anisotropic a posteriori error estimators for the adaptative solution of 3D inviscid compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 59, 47–74.

BRUNTON, S. L. et ROWLEY, C. W. (2010). Fast computation of finite-time lyapunov exponent fields for unsteady flows. *Chaos*, 20, 017503.

BUSCAGLIA, G. et DARI, E. (1997). Anisotropic mesh optimisation and its application to adaptation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 40, 4119–4136.

CASTRO-DIAZ, M., HECHT, F., MOHAMMADI, B. et PIRONNEAU, O. (1997). Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 25, 475–491.

CHAKRABORTY, P., BALACHANDAR, S. et ADRIAN, R. J. (2005). On the relationship between local vortex identification schemes. *J. Fluid Mech.*, 535, 189–214.

CHAPRA, S. et CANALE, R. (1988). *Numerical methods for engineers*. McGraw-Hill, seconde édition.

CHEN, L., SUN, P. et XU, J. (2007). Optimal anisotropic meshes for minimizing interpolation errors in L^p -norm. *Mathematics of Computation*, vol. 76, 179–204.

CHONG, M. S., PERRY, A. E. et CANTWELL, B. J. (1990). A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids*, 2, 765–777.

COURTY, F., LESERVOISIER, D., GEORGE, P. et A., D. (2006). Continuous metrics and mesh adaptation. *Applied Numerical Mathematics*, vol. 56, 117–145.

ELHMAÏDI, D., PROVENZALE, A. et BABIANO, A. (1993). Elementary topology of two-dimensional turbulence from a lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. *Journal of Fluid Mechanics*, 257, 533–558.

FREY, P. et BOROUCHAKI, H. (1997). Qualit des maillages de surfaces : Quality of surface meshes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325, 925–930.

GARTH, C., GERHARDT, F. et XAVIER, T. (2007). Efficient computation and visualization of coherent structures in fluid flow applications. *IEEE Trans. Visual. Comput. Graph.*, 13, 1464–1471.

GEORGE, P. L. et FREY, P. J. (2008). *Mesh Generation*. Wiley-ISTE.

GREEN, M. A., ROWLEY, C. W. et HALLER, G. (2007). Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 572, 111–120.

- HABASHI, W., DOMPIERRE, J., BOURGAULT, Y., AIT-ALI-YAHIA, D., FORTIN, M. et VALLET, M. (2000). Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. part I : general principles. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 32, 725–744.
- HALLER, G. (2001). Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows. *Physica D*, vol. 149, 248–277.
- HALLER, G. (2002). Lagrangian coherent structures from approximate velocity data. *Phys. Fluids*, vol. 14, 1851–1861.
- HALLER, G. (2005). An objective definition of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 525, 1–26.
- HALLER, G. et YUAN, G. (2000). Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 147, 352–370.
- HOLMES, P., LUMLEY, J. et BERKOOZ, G. (1998). *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge Univ Pr.
- HUNT, J., WRAY, A. et MOIN, P. (1988). Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *In its Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases, 2. Proceedings of the 1988 Summer Program p 193-208 (SEE N89-24538 18-34)*. vol. 1, 193–208.
- JEONG, J. et HUSSAIN, F. (1995). On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285, 69–94.
- JOHNSON, C. (1992). *Numerical solution of partial equations by the finite element method*. Cambridge, quatrième édition.
- KOH, T.-Y. et LEGRAS, B. (2002). Hyperbolic lines and the stratospheric polar vortex. *Chaos*, 12, 382–394.
- LABBÉ, P. et GARON, A. (1995). A robust implementation of zienkiewicz and zhu’s local patch recovery method. *Communications in numerical methods in engineering*, 11, 427–434.

- LACASSE, D., GARON, A. et PELLETIER, D. (2007). Development of an adaptive Discontinuous-Galerkin finite element method for advection-reaction equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 196, 2071–2083.
- LAPEYRE, G. (2002). Characterization of finite-time Lyapunov exponents and vectors in two-dimensional turbulence. *Chaos*, 12, 688–698.
- LEKIEN, F. et MARSDEN, J. (2005). Tricubic interpolation in three dimensions. *International journal for numerical methods in engineering*, 63, 455–471.
- LEKIEN, F. et ROSS, S. D. (2010). The computation of finite-time lyapunov exponents on unstructured meshes and for non-euclidean manifolds. *Chaos*, 20, 1–20.
- LEUNG, S. (2011). An Eulerian approach for computing the finite time lyapunov exponent. *J. Comput. Physics*, 230, 3500–3524.
- LIPNIKOV, K. et VASSILEVSKI, Y. (2006). Analysis of hessian recovery methods for generating adaptive meshes. Springer, éditeur, *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*. 163–171.
- LOSEILLE, A. (2008). *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- LOSEILLE, A., DERVIEUX, A., FREY, P. et ALAUZET, F. (2007). Achievement of global second order mesh convergence for discontinuous flows with adapted unstructured meshes. *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. 2007.
- MATHUR, M., HALLER, G., PEACOCK, T., RUPPERT-FELSOT, J. E. et SWINNEY, H. L. (2007). Uncovering the Lagrangian skeleton of turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 98, 144502.
- PALMERIO, B. et DERVIEUX, A. (1986). Application of a fem moving node adaptative method to accurate shock capturing. *Numerical Grid Generation in CFD*, vol. 29, 257–270.
- PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K. et ZIENKIEWICZ, O. (1987). Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, vol. 72, 449–466.

- PROVENZALE, A. (1999). Transport by coherent barotropic vortices. *Annual review of fluid mechanics*, 31, 55–93.
- RAFFEL, M., WILLERT, C. et KOMPENHANS, J. (2002). *Particle image velocimetry : A practical guide*. Springer, New York.
- RAFFEL, M., WILLERT, C., WERELEY, S. et KOMPENHANS, J. (2007). *Particle Image Velocimetry*. Springer, seconde édition.
- REDDY, J. (2006). *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill, troisième édition.
- RIPPA, S. (1992). Long and thin triangles can be good for linear interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 29, 257–270.
- SAHNI, O., JANSEN, K., SHEPHARD, M., TAYLOR, C. et BEALL, M. (2008). Adaptive boundary layer meshing for viscous flow simulations. *Engineering with Computers*, vol. 24, 267–285.
- S.A.S., D. (2003). *MeshAdapt : A mesh adaptation tool, User manual*. Pôle Teratec - BARD-1,, Domaine du Grand Rué, 91680 Bruyères-le-Chatel, France. Version 3.0.
- SHADDEN, S., LEKIEN, F. et MARSDEN, J. (2005). Definition and properties of lagrangian coherent structures from finite-time lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D*, vol. 212, 271–304.
- SHEWCHUK, J. (2002). What is a good linear finite element ? interpolation, conditioning, and quality measures. *Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable*. 115–126.
- SOLOMON, T. H. et GOLLUB, J. P. (1988a). Chaotic particle transport in time-dependent rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. A*, 38, 6280–6286.
- SOLOMON, T. H. et GOLLUB, J. P. (1988b). Passive transport in steady Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Fluids*, 31, 1372–1379.
- TANG, W., CHAN, P. et HALLER, G. (2010a). Accurate extraction of lagrangian coherent structures over finite domains with application to flight data analysis over hong kong international airport. *Chaos*, 20, 502.

- TANG, W., CHAN, P. W. et HALLER, G. (2010b). Lagrangian coherent structure analysis of terminal winds detected by Lidar. Part I : Turbulence structures. *J. Appl. Meteor. Climatol.*, 50, 325–338.
- VALLET, M. (1992). *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. Thèse de doctorat, L’Université de Paris VI.
- VALLET, M., MANOLE, C., DOMPIERRE, J., DUFOUR, S. et GUIBAULT, F. (2007). Numerical comparison of some hessian recovery techniques. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 72, 987–1007.
- VAN DYKE, M. (1982). *An album of fluid motion*. The Parabolic Press.
- VÉTEL, J., GARON, A. et PELLETIER, D. (2010). Vortex identification methods based on temporal signal-processing of time-resolved PIV data. *Exp. Fluids*, 48, 441–459.
- VOTH, G. A., HALLER, G. et GOLLUB, J. P. (2002). Experimental measurements of stretching fields in fluid mixing. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 254501.
- ZHOU, J., ADRIAN, R. J. et BALACHANDAR, S. (1996). Autogeneration of near wall vortical structure in channel flow. *Phys. Fluids*, 8, 288–291.
- ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, 1331–1364.
- ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, 1365–1382.

Annexe A

Métrique optimale

Cette section présente l'obtention des équations nécessaires à la construction de la métrique optimale pour l'adaptation de maillage. Les différents coefficients formant cette métrique sont obtenues en minimisant l'erreur d'interpolation pour une fonction quelconque en limitant le nombre de nœuds. Ceci permet de trouver la position optimale des nœuds afin de minimiser l'erreur d'interpolation en norme L^p .

Soit la fonction F :

$$F(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n h_i^2(x) \beta_i(x) \quad \text{avec } n \text{ la dimension de l'espace} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta_i(x) = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right| \quad \text{Le Hessien avec des valeurs propres positives} \quad (\text{A.2})$$

$$h_i(x) \quad \text{La longueur des côtés de l'élément} \quad (\text{A.3})$$

Initialement, le but est de déterminer une forme équivalente à la fonction F de l'équation (A.1) afin de minimiser cette fonction pour un nombre de nœuds cibles. On débute avec un élément \mathcal{K} quelconque en 2D que l'on représente localement par les longueurs h_i de ces côtés comme à la Fig. A.1.

Un autre façon de représenter cet élément serait en utilisant les ratios anisotropes. Pour l'exemple de la Fig. A.1, ou tout autre triangle \mathcal{K} , les ratios anisotropes sont :

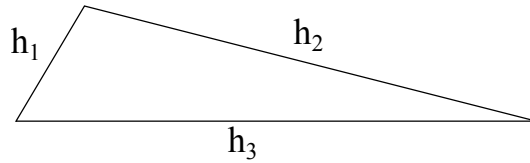


FIGURE A.1 Exemple d'élément anisotrope

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{h_1}{h_2 h_3} \\
r_2 &= \frac{h_2}{h_1 h_3} \\
r_3 &= \frac{h_3}{h_1 h_2}
\end{aligned}$$

Donc pour des éléments de dimensions n , on peut exprimer le ratio anisotrope comme étant :

$$r_i(x) = \frac{h_i(x)}{(\prod_{i=1}^n h_i(x))^{1/n}} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

Remarque 7 *Cependant, on a toujours que :*

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i(x) \right) r_n(x) = 1 \quad (\text{A.5})$$

Donc ces ratios ne sont pas tous indépendants. Ceci peut s'expliquer du fait que deux triangles semblables (3 mêmes angles) possèdent les mêmes ratios anisotropes sans couvrir la même surface. Il est donc nécessaire d'utiliser les ratios de (r_1, \dots, r_{n-1}) et de construire une fonction permettant d'exprimer la surface occupée par les éléments du domaine. C'est ce qui nous amène à la construction de la fonction de densité :

$$d(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i(x)} \quad \text{la fonction de densité} \quad (\text{A.6})$$

On peut donc exprimer les longueurs des côtés $(h_i(x))$ des éléments en fonction de $r_i(x)$ et $d(x)$:

$$r_i(x) = h_i(x) d(x)^{1/n} \quad \text{avec } i = 1 \dots n-1 \quad (\text{A.7})$$

$$r_n(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} r_i(x)} = h_n(x) d(x)^{1/n} \quad (\text{A.8})$$

$$h_i(x) = r_i(x) d(x)^{-1/n} \quad \text{avec } i = 1 \dots n-1 \quad (\text{A.9})$$

$$h_n(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} r_i(x)} d(x)^{1/n} = r_n(x) d(x)^{-1/n} \quad (\text{A.10})$$

Pour simplifier l'écriture de $h_n(x)$, prenons, la fonction $P(x)$ comme étant :

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n-1} r_i(x) \quad (\text{A.11})$$

$$h_n(x) = P(x)^{-1} d(x)^{-1/n} \quad (\text{A.12})$$

Maintenant que nous avons déterminé une forme équivalente de l'équation (A.1) à l'aide de r_i et $d(x)$, on peut en reprenant récrire $F(h_1, h_2, \dots, h_n)$ à l'aide des expressions de $h_i(x)$ (A.9) et $h_n(x)$ (A.12) :

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2, \dots, h_n) &= \sum_{i=1}^n h_i^2(x) \beta_i(x) \\ F(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, d) &= \left[\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right] d(x)^{-2/n} \end{aligned}$$

Ensuite, on passe au problème de minimisation. Soit le lagrangien augmenté et le multiplicateur C , une constante. On remarque que la constante C multiplie la contrainte de notre problème qui est que l'intégrale de la fonction de densité $d(x)$ sur notre domaine doit être égale à la complexité du maillage.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, d, C) &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right]^p d(x)^{-2p/n} d\Omega \\ &\quad + C \left[\int_{\Omega} d(x) d\Omega - N \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Remarque 8 La contrainte est basée sur la fonction de densité, qui est présentée à l'équation (A.6). Afin de visualiser le sens physique de cette fonction, regardons un domaine 1-D, subdivisé en plusieurs éléments isotropes de longueur h .

Pour ce domaine Ω , l'intégrale de la densité des bornes $A \rightarrow B$:

$$\int_A^B d(x) d\Omega = \int_A^B \frac{1}{h} d\Omega = \frac{B - A}{h} = \text{Nombre d'éléments} \quad (\text{A.14})$$

Lorsque les éléments sont isotropes, l'intégrale de la fonction de densité est égale aux nombres d'éléments dans le domaine Ω . Cependant, lorsque les éléments sont anisotropes, l'intégrale de $d(x)$ sur le domaine Ω est égale à la complexité du maillage, qui est proportionnel au nombre de nœuds (Loseille et al., 2007).

Soit la fonction suivante :

$$f(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, d) = \left[\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right]^p d(x)^{-2p/n} \quad (\text{A.15})$$

Lemme 1

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df}{dt}(r_1, \dots, r_{n-1}, d + t\delta d) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right]^p (d(x) + t\delta d)^{-2p/n} \right\} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right]^p \left(-\frac{2p}{n} \right) (d(x) + t\delta d)^{-2p-n/n} \delta d \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right]^p d^{-2p-n/n}(x) \left(-\frac{2p}{n} \right) \delta d \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Lemme 2

$$\begin{aligned} P(x) &= P(r_1, \dots, r_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} r_i(x) \\ P(\dots, r_k + t\delta r_k, \dots) &= \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) (r_k + t\delta r_k) \\ \frac{dP}{dt} &= \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) \delta r_k \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Lemme 3

$$\frac{d}{dt} P(r_1, \dots, r_{n-1})^{-2} = -2 P(r_1, \dots, r_{n-1})^{-3} \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) \delta r_k \quad (\text{A.18})$$

Lemme 4

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} P(\dots, r_k + t\delta r_k, \dots)^{-2} = -2 P(x)^{-3} \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) \delta r_k \quad (\text{A.19})$$

Lemme 5

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} f(r_1, \dots, r_k + t\delta r_k, \dots, d) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} \overbrace{r_i^2(x) \beta_i(x)} + (r_k(x) + t\delta r_k)^2 \beta_k(x) + P(\dots, r_k + t\delta r_k, \dots)^{-2} \beta_n(x) \right] d(x)^{-2p/n} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left[2(r_k(x) + t\delta r_k) \beta_k(x) \delta r_k + \frac{d}{dt} P(\dots)^{-2} \beta_n(x) \right] d(x)^{-2p/n} \right\} \\ &= \left[2r_k(x) \beta_k(x) \delta r_k + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} P(\dots)^{-2} \beta_n(x) \right] d(x)^{-2p/n} \\ &= \left[2r_k(x) \beta_k(x) \delta r_k - 2P(x)^{-3} \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) \delta r_k \beta_n(x) \right] d(x)^{-2p/n} \\ &= -2 \left[-r_k(x) \beta_k(x) \delta r_k + P(x)^{-3} \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) \delta r_k \beta_n(x) \right] d(x)^{-2p/n} \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

Proposition 1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r_1, \dots, r_{n-1}, \dots, d, C) &= \int_{\Omega} f(r_1, \dots, r_k + t\delta r_k, \dots, d) dx + C \left(\int_{\Omega} d(x) dx - N \right) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\dots, r_k + t\delta r_k, \dots, d, C) &= \dots \\ \int_{\Omega} -2 \left[-r_k(x) \beta_k(x) + P(x)^{-3} \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) \beta_n(x) \right] d(x)^{-2p/n} \delta r_k dx &= 0 \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

De cette limite, il est possible d'affirmer que :

$$\begin{aligned}
r_k(x)\beta_k(x) &= P(x)^{-3} \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right) \beta_n(x) \\
r_k(x)\beta_k(x) &= P(x)^{-2} \frac{\left(\prod_{i=1, i \neq k}^{n-1} r_i(x) \right)}{\left(\prod_{i=1}^{n-1} r_i(x) \right)} \beta_n(x) \\
r_k(x)\beta_k(x) &= P(x)^{-2} \frac{\beta_n(x)}{r_k(x)} \\
r_k^2(x) &= P(x)^{-2} \frac{\beta_n(x)}{\beta_k(x)} \\
r_k(x) &= P(x)^{-1} \left(\frac{\beta_n(x)}{\beta_k(x)} \right)^{1/2} \\
r_k(x) &= P(x)^{-1} \frac{\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{1/2}}{\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|} \quad k = 1, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Avec l'équation (A.22). On peut exprimer $P(x)$:

$$\begin{aligned}
P(x) &= \prod_{k=1}^{n-1} r_k(x) = P^{-n+1}(x) \prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2}} \right|^{1/2} \\
P(x)^{n-1} P(x) &= P(x)^{n-1} P(x)^{-n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2}} \right|^{1/2} \\
P(x)^n &= \frac{\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{\frac{n-1}{2}}}{\prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{1/2}} \\
&= \frac{\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{n/2}}{\prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{1/2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{1/2}}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Mais comme nous avons que :

$$\left(\left(\prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right| \right) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right| \right)^{1/2} = \prod_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{1/2} = \det(|\mathcal{H}|)^{1/2} \tag{A.24}$$

Ce qui nous permet de récrire la définition de $P(x)$ avec l'expression de la matrice hessienne (\mathcal{H}) :

$$\begin{aligned} P(x) &= \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{1/2} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{-1/2n} \\ &= \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{1/2} \det(|\mathcal{H}|)^{-1/2n} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

De la même manière, on peut récrire l'expression de r_k en fonction de la matrice hessienne à partir de l'équation (A.22) et avec le résultat obtenu en (A.25)

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{-1/2} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{1/2n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right|^{1/2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{-1/2} \\ &= \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{-1/2} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{1/2n} \\ &= \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{-1/2} \det(|\mathcal{H}|)^{1/2n} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Note :

$$\begin{aligned} h_k(x) &= r_k(x) d(x)^{-1/n} \\ h_n(x) &= P(x)^{-1} d(x)^{-1/n} \end{aligned}$$

À ce stade, on connaît $r_k(x)$ (A.26) et $P(x)$ (A.25) en fonction de la matrice hessienne. Il faut calculer $d(x)$. Cette fonction s'obtient de extrémisation de la fonctionnelle \mathcal{L} par rapport à $d(x)$ et de l'imposition de la contrainte sur le nombre de nœuds.

Proposition 2

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(r_1, \dots, r_{n-1}, d(x) + t\delta d(x), C) = \\
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right)^p (d(x) + t\delta d(x))^{-2p/n} dx + \right. \\
& \left. C \left(\int_{\Omega} (d(x) + t\delta d(x)) dx - N \right) \right\} = \\
& \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right)^p \frac{-2p}{n} d(x)^{-2p-n/n} \delta d(x) + \right. \\
& \left. C \left(\int_{\Omega} \delta d(x) \right) \right\} = \\
& \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right)^p \frac{-2p}{n} d(x)^{-2p-n/n} + C \right\} \delta d(x) = \\
& \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right)^p \frac{-2p}{n} d(x)^{-2p-n/n} + C \right\} \delta d(x) =
\end{aligned}$$

Finalement on obtient que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \right)^p \frac{-2p}{n} d(x)^{-2p-n/n} + C = 0$$

Afin de simplifier l'écriture, on remplace les termes entre parenthèses par $\gamma = (\dots)$.

De plus comme, $\gamma > 0$, $P > 0$, $n > 0$, $d > 0$, \therefore la constante $C < 0$:

$$\begin{aligned}
C &= (\gamma)^p \frac{-2p}{n} d(x)^{-2p-n/n} \\
d(x)^{2p+n/n} &= \frac{-2p}{nC} \gamma^p \\
d(x) &= \left(\frac{-2p}{nC} \right)^{n/2p+n} \gamma^{np/2p+n}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Nous savons aussi que l'intégrale de la densité du maillage doit nous donner le nombre de nœuds. Soit que :

$$\int_{\Omega} d(x) dx = N \tag{A.28}$$

Donc avec l'équation (A.27), on peut exprimer le nombre de nœuds (N) :

$$\begin{aligned}
N &= \left(\frac{-2p}{nC} \right)^{n/2p+n} \int_{\Omega} \gamma^{np/2p+n} dx \\
N^{2p+n/n} &= \left(\frac{-2p}{nC} \right) \left(\int_{\Omega} \gamma^{np/2p+n} dx \right)^{2p+n/n} \\
\left(\frac{-2p}{nC} \right)^{n/2p+n} &= N \left(\int_{\Omega} \gamma^{np/2p+n} dx \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

On peut donc écrire l'expression de $d(x)$ (A.27) à l'aide de la dernière équation (A.29) :

$$d(x) = N \frac{\gamma^{np/2p+n}}{\int_{\Omega} \gamma^{np/2p+n} dx}$$

Il faut donc calculer l'expression de γ afin d'exprimer $d(x)$ en fonction de la matrice hessienne :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2(x) \beta_i(x) + P(x)^{-2} \beta_n(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right| \cancel{\det(|\mathcal{H}|)^{1/n}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right| \cancel{\det(|\mathcal{H}|)^{1/n}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_n^2} \right| \\
&= n \det(|\mathcal{H}|)^{1/n}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

On peut maintenant exprimer $d(x)$ en fonction du hessien à l'aide de l'expression de γ (A.30).

$$d(x) = N \frac{\det(|\mathcal{H}|)^{p/2p+n}}{\int_{\Omega} \det(|\mathcal{H}|)^{p/2p+n} dx} \tag{A.31}$$

On peut écrire ainsi $h_i(x)$ et $h_n(x)$:

$$\begin{aligned}
h_i(x) &= r_i(x) d(x)^{-1/n} \\
&= \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{-1/2} \det(|\mathcal{H}|)^{1/2n} \frac{1}{N^{1/n}} \frac{\left(\int_{\Omega} \det(|\mathcal{H}|)^{p/2p+n} dx \right)^{1/n}}{\det(|\mathcal{H}|)^{p/(2p+n)n}} \\
&= \frac{1}{N^{1/n}} \left(\int_{\Omega} \det(|\mathcal{H}|)^{p/2p+n} dx \right)^{1/n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right|^{-1/2} \det(|\mathcal{H}|)^{1/(2(2p+n))}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Si on utilise l'expression de $h_n(x)$:

$$h_n(x) = P(x)^{-1} d^{-1/n}(x) \quad (\text{A.33})$$

On obtient le même résultat obtenu avec la relation de $h_i(x)$ (A.32). Également, sachant la relation entre les valeurs propres et la longueur $h_i(x)$:

$$h_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(x)}} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.34})$$

On peut donc exprimer une relation entre la matrice hessienne et les valeurs propres de la métrique :

$$\lambda_i(x) = \frac{1}{h_i^2(x)} = N^{2/n} \left(\int_{\Omega} \det(|\mathcal{H}|)^{p/2p+n} dx \right)^{-2/n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right| \det(|\mathcal{H}|)^{-1/(2p+n)} \quad (\text{A.35})$$

Nous simplifions l'écriture des valeurs propres de la métrique en posant que le coefficient calculé en intégrant la valeur du Hessien sur le domaine est le D_{L^p} et il est égale à :

$$D_{L^p} = N^{2/n} \left(\int_{\Omega} \det(|\mathcal{H}|)^{p/2p+n} dx \right)^{-2/n} \quad (\text{A.36})$$

Et les valeurs propres du Hessien comme $\|\lambda_i\|$:

$$\|\lambda_i\| = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k^2} \right| \det(|\mathcal{H}|)^{-1/(2p+n)} \quad (\text{A.37})$$

Donc les valeurs propres de la métrique peuvent s'exprimer tout simplement comme étant :

$$\lambda_i(x) = D_{L^p} \|\lambda_i\| \quad (\text{A.38})$$

Il reste maintenant à reconstruire le matrice de la métrique optimale. Sachant que :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} v_1 &= \beta_1 v_1 \\ \mathcal{H} v_n &= \beta_n v_n \\ \mathcal{H} \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} &= \beta_n \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

On peut exprimer les vecteurs lignes des vecteurs propres à l'aide de la matrice de

rotation \mathcal{R} . L'équation A.39 devient alors :

$$\mathcal{R}^{-1} \mathcal{H} \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Puisque les vecteurs propres de \mathcal{H} et de \mathcal{M} sont les mêmes :

$$\mathcal{R}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D_{L^p} \begin{bmatrix} \|\lambda_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \|\lambda_n\| \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Ce qui permet d'écrire l'expression finale de la métrique optimale :

$$\mathcal{M} = D_{L^p} \mathcal{R} \begin{bmatrix} \|\lambda_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \|\lambda_n\| \end{bmatrix} \mathcal{R}^{-1} \quad (\text{A.42})$$

Le tableau A.1 résume les coefficients nécessaire à la formation de la métrique optimale pour les dimensions (n) de 1 à 4.

TABLEAU A.1

	D_{L^p}	$\ \lambda_i\ $
n	$N^{2/n} \left(\int_{\Omega} \det(H_u)^{p/2p+n} dx \right)^{-2/n}$	$\left \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right \det(H_u)^{-1/2p+n}$
1	$N^2 \left(\int_{\Omega} \det(H_u)^{p/2p+1} dx \right)^{-2}$	$\left \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right \det(H_u)^{-1/2p+1}$
2	$N \left(\int_{\Omega} \det(H_u)^{p/2p+2} dx \right)^{-1}$	$\left \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right \det(H_u)^{-1/2p+2}$
3	$N^{2/3} \left(\int_{\Omega} \det(H_u)^{p/2p+3} dx \right)^{-2/3}$	$\left \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right \det(H_u)^{-1/2p+3}$
4	$N^{1/2} \left(\int_{\Omega} \det(H_u)^{p/2p+4} dx \right)^{-1/2}$	$\left \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \right \det(H_u)^{-1/2p+4}$